



Simulation numérique en volume finis, de problèmes d'écoulements multidimensionnels raides, par un schéma de flux à deux pas

Kamel Mohamed

► To cite this version:

Kamel Mohamed. Simulation numérique en volume finis, de problèmes d'écoulements multidimensionnels raides, par un schéma de flux à deux pas. Mathématiques [math]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2005. Français. NNT : . tel-00010794v2

HAL Id: tel-00010794

<https://theses.hal.science/tel-00010794v2>

Submitted on 28 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : Mathématiques appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

Kamel MOHAMED

le 12 octobre 2005

Titre :

**Simulation numérique en volume finis, de problèmes
d'écoulements multidimensionnels raides, par un schéma de
flux à deux pas**

JURY

Mme	Laure Quivy	, Co-directrice de thèse
M.	Fayssal Benkhaldoun	, Directeur de thèse
M.	Florian De Vuyst	, Rapporteur
M.	Jean Michel Ghidaglia	, Examineur
M.	Olivier Lafitte	, Examineur
M.	Frédéric Pascal	, Rapporteur

Remerciements

J'aimerais exprimer ici ma reconnaissance à tous les collègues et amis, qui d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'accomplissement de cette thèse.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse monsieur Fayssal BENKHALDOUN qui m'a proposé ce sujet, et m'a fait confiance pour travailler sur des problèmes de grande complexité. Je le remercie très chaleureusement pour sa disponibilité, son aide et ses orientations qui m'ont permis de franchir les différentes étapes de cette thèse. De même je remercie de tout mon cœur madame Laure QUIVY d'avoir accepté de me co-encadrer, et d'avoir ainsi fortement contribué à l'élaboration de cette thèse. Sa vigilance, ses conseils, ainsi que sa très grande patience m'auront été d'un soutien décisif. Je les remercie tous les deux infiniment pour s'être montré disponibles et pour m'avoir aidé et encouragé à chaque fois que j'en avais besoin. Travailler avec eux a toujours été pour moi très plaisant et enrichissant.

Je voudrais remercier ensuite très chaleureusement Messieurs Florian DE VUYST et Frédéric PASCAL pour le travail qu'ils ont effectué en rapportant sur cette thèse, et pour les remarques pertinentes qu'ils ont faites à cette occasion. Mes vifs remerciements vont également à Messieurs Jean-Michel GHIDAGLIA et Olivier LAFITTE, pour l'honneur qu'ils me font d'être membres du jury, et pour avoir accepté de juger ce travail. Je tiens par ailleurs à remercier tous les membres du laboratoire de Mathématiques LAGA et tout le personnel de l'université Paris 13, autant disponible que professionnel. J'exprime également ma reconnaissance au groupe de travail "Mécanique des Fluides Réels" du CMLA à l'ENS Cachan, à ses organisateurs et à ses membres. En effet, j'ai pu exposer régulièrement dans ce cadre l'état d'avancement de mes travaux, et bénéficier de remarques et de suggestions déterminantes.

Un grand merci également à Monsieur François Cuvelier pour son aide et ses conseils, et à mes collègues et amis Messieurs Slah Sahmim, Abdellatif Messaoudi et Fethi Mahmoudi pour leurs présences et leurs soutiens permanent durant toutes ces années de thèse.

Enfin je n'en serais pas là sans l'aide du gouvernement de mon pays, l'Egypte, qui a financé ma thèse, et sans le dévouement continu des professeurs de mon parcours étudiantin, que ce soit au primaire, au secondaire, ou dans l'enseignement supérieur. Qu'ils soient tous ici chaleureusement remerciés. Je ne citerais pas de noms de peur d'en oublier.

Sur un registre plus personnel, je tiens à remercier ma mère, mon père que Dieu ait son âme, mes frères, et l'ensemble de ma famille, dont mes enfants et ma femme Asmaa à qui je dédie cette thèse.

Table des matières

Notations	5
Introduction Générale	7
1 Présentation générale	15
1.1 Lois de bilan	15
1.1.1 Propriétés des lois de bilan dans le cas homogène	16
1.1.2 Problématique des systèmes non homogènes	18
1.2 Problèmes traités	19
1.2.1 Les équations de Saint-Venant	19
1.2.2 Les équations d'Euler	22
1.2.3 Les modèles diphasiques	25
2 Développement de schémas numériques aux Volumes Finis pour des problèmes non homogènes	33
2.1 Présentation du problème ; formulation faible	33
2.2 Méthode des Volumes Finis	34
2.2.1 Construction de la méthode en 1D	34
2.2.2 Extension des schéma volumes finis en 2D	36
2.2.3 Rappel sur les flux numériques des schémas volume finis les plus performants	37
2.2.4 Approximation du terme source	39
3 Un schéma de flux à deux étapes : le schéma SRNHR	45
3.1 Présentation du schéma SRNHR	45
3.1.1 Remarque concernant le paramètre de contrôle $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$:	49

3.1.2	Introduction du schéma SRNHR :	49
3.2	Schéma SRNHR, dans le cas bidimensionnel	50
3.2.1	Détermination de W_{ij}^n :	50
3.2.2	Approximation du terme non homogène dans la partie correcteur . .	52
3.3	Extension à l'ordre 2 en espace (MUSCL)	53
4	Analyse numérique en dimension un	59
4.1	Schéma Volumes Finis pour un problème scalaire homogène	59
4.1.1	Forme générale d'un schéma aux volumes finis	60
4.1.2	Quelques définitions	61
4.1.3	Rappel de quelques résultats de stabilité et de convergence	63
4.2	Schéma de Rusanov	64
4.2.1	Cas linéaire homogène	64
4.2.2	Cas non linéaire homogène	64
4.3	Schéma SRNHR (cas homogène)	66
4.3.1	Cas linéaire homogène	67
4.3.2	Cas non linéaire homogène	69
4.3.3	Etude locale du paramètre de contrôle dans l'étape prédicteur . . .	72
5	Sur l'approximation des gradients dans l'évaluation de l'état intermédiaire du schéma SRNHR : cas unidimensionnel	77
5.1	Cas linéaire	77
5.2	Ordre 2 en espace	79
5.3	Propriété TVD du schéma décentré d'ordre deux en espace, dans le cas d'une équation linéaire homogène sur maillage non uniforme	83
5.4	Schéma SRNHR avec maillage non uniforme	86
6	Caractéristiques du schéma et conditions aux limites	93
6.1	Préservation des états d'équilibre dans le cas non homogène	93
6.1.1	Dans le cas scalaire de l'équation de Burgers	93
6.1.2	Dans le cas des équations de Saint-Venant	95
6.2	Traitement des conditions aux limites	98
6.2.1	Cas scalaire linéaire	98

6.2.2	Cas 1D vectoriel	99
6.2.3	Résultats numériques	101
6.2.4	Conditions aux limites pour un système non linéaire	102
7	Expériences numériques en monophasique	111
7.1	Problème linéaire scalaire	112
7.1.1	Problème linéaire homogène :	112
7.1.2	Problème linéaire non homogène :	115
7.2	Problème de Burgers	117
7.2.1	Algorithme de calcul du paramètre de contrôle dans le cas du problème de Burgers homogène	117
7.2.2	Problème de Burgers homogène	118
7.2.3	Problème de Burgers non homogène	123
7.3	Problème de Saint-Venant 1D	124
7.3.1	Problème de Saint-Venant homogène	124
7.3.2	Algorithme de calcul du paramètre de contrôle dans le cas du problème de Saint-Venant homogène	124
7.3.3	Cas test de rupture de barrage sur fond mouillé	125
7.3.4	Problème de Saint-Venant non homogène	129
7.4	Problème de Saint-Venant 2D	134
7.4.1	Problème de Saint-Venant 2D homogène	134
7.4.2	Problème de Saint-Venant 2D non-homogène	138
7.5	Discussion sur le choix d'approximation du terme non différentiel	146
7.6	Problème d'Euler 1D	148
7.7	Problème d'Euler 2D	150
8	Expériences numériques en diphasique	155
8.1	Problème diphasique monodimensionnel	156
8.1.1	Application au problème de Ransom 1D	157
8.1.2	Conditions de calcul	157
8.1.3	Résultats	158
8.1.4	Discussion sur le choix d'approximation du terme non différentiel	162
8.2	Problème diphasique bidimensionnel en maillage triangulaire	167

8.2.1	Problème de Ransom 2D	167
8.2.2	Conditions de calcul	168
8.2.3	Résultats numériques	169
8.3	Problème diphasique bidimensionnel en maillage quadrangulaire	183
8.3.1	Problème de Ransom en maillage quadrangulaire	185
Conclusion		193

Notations

c	La vitesse du son
E	L'énergie totale
$F(U)$	Le flux physique
g	Constante de gravité
h	Hauteur de l'eau
P	La pression
s	La vitesse de choc (Rankine-Hugoniot)
$S_{j+\frac{1}{2}}^n$	La vitesse de Rusanov locale
U	Vecteur des variables conservatives
u_k, v_k	La vitesse de la phase k en direction x et y
\vec{V}	Vecteur vitesse
$z(x, y)$	Fond de l'eau
μ_k	Taux de présence locale de la phase k ($k=l$, liquide, $k=v$, vapeur)
ρ_k	Densité de la phase k
γ	Rapport des chaleurs spécifiques
Ω	Ouvert de \mathbb{R}^d
$L^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions bornées sur Ω
$C^1(\Omega)$	Fonction continûment dérivable sur Ω
$BV(\Omega)$	Espace des fonctions à variations bornées sur Ω
$\nabla \cdot$	Opérateur de divergence
∇	Opérateur de gradient
A_i	Aire de la cellule c_i
$A_j(U)$	La matrice Jacobienne de la fonction $F_j(U)$
\tilde{A}	La matrice de Roe
∂c_i	La frontière de la cellule c_i
d	Dimension de l'espace physique
ET	L'erreur de troncature
$F_j(1 \leq j \leq d)$	Fonction flux
$g(\theta)$	Facteur d'amplification
$K(i)$	L'ensemble des cellules qui ont une arête commune avec la cellule c_i
\vec{n}	Vecteur normal unitaire
Q	La partie non homogène (terme source)
Q_{fx}, Q_{fy}	Le terme de frottement du fond
Q_{ox}, Q_{oy}	Le pente du fond du canal
W_i	Invariant de Riemann ($i = 1, \dots, p$)

$\Phi(U_j^n, U_{j+\frac{1}{2}}^n)$	Le flux numérique monodimensionnel à l'interface
$\Phi(U_j^n, U_i^n, \vec{n}_{ij})$	Le flux numérique bidimensionnel
ψ_j	Fonction Limiteur donnée
θ_j	Le rapport de deux pentes consécutives
$\xi_{j+\frac{1}{2}}^n$	L'approximation du terme source non différentiel
$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$	Paramètre de contrôle dans le schéma
Δt	Pas de temps
Δx	Pas d'espace
$\mathcal{G}^L, \mathcal{G}^R$	Fonctions sources définies à gauche et à droite
γ_{ij}	L'arête commune aux cellules c_i et c_j

Introduction Générale

Cette thèse est consacrée à la simulation numérique monodimensionnelle et bidimensionnelle de problèmes d'écoulements de fluides régis par des systèmes de lois de bilan non homogènes.

L'intérêt d'aborder cette thématique est double : il y a d'une part les difficultés introduites par les systèmes non homogènes, y compris dans le cas monodimensionnel, et, d'autre part les difficultés de l'extension des schémas numériques au cas multidimensionnel, précisément pour de tels systèmes.

Les systèmes non homogènes peuvent représenter un large champ de problèmes d'écoulements de fluides, apparaissant dans les domaines civil, militaire, ou environnemental.

Ainsi, l'écoulement en eau peu profonde, sur un fond non plat, est un des exemples issus du domaine civil que nous pouvons considérer. Ce phénomène est régi par les équations de Saint-Venant qui représentent généralement les écoulements à surface libre dans les rivières, les lacs ou les régions côtières, et permet de modéliser des problèmes liés à l'environnement tels que la prévention et le contrôle des inondations, la prédiction des ondes de submersion dues à une rupture de barrage, le transport et la dispersion des polluants, ou encore les réseaux d'irrigation.

Dans ce cas la non homogénéité provient du terme source qui contient le produit d'un terme différentiel (la dérivée en espace de la côte du fond), et d'un terme non différentiel (la hauteur de l'eau). Ne considérant que le cas 1D, on conçoit aisément la difficulté qu'induit une bonne représentation de ce terme, lorsque l'on traite des configurations -tout à fait réalistes- d'écoulements sur des fonds discontinus. En termes mathématiques, on est en présence d'un produit de distributions singulier compliquant ainsi l'écriture des relations de saut de Rankine Hugoniot.

Pour illustrer le degré de difficulté que nous évoquons ici, on peut noter que jusqu'à ces dernières années, la plupart des schémas numériques standards, échouaient lorsqu'il s'agissait de simuler correctement le cas d'un plan d'eau au repos, sur un fond fortement variable. La solution étant une surface libre constante (hauteur d'eau plus côte du fond), et un débit constant nul. Généralement une perturbation apparaît au niveau du débit, là où le fond varie fortement, et génère une perturbation également de la surface libre.

De même, un deuxième exemple classique est celui de la rupture de barrage sur un fond en forme de marche. La solution exacte de ce problème peut être calculée (voir les travaux de Alcrudo et Benkhaldoun [AB01]), et fait apparaître en particulier une discontinuité stationnaire à l'endroit de la marche, discontinuité au travers de laquelle le débit est constant.

En particulier, le déficit numérique ici est, d'une part de capturer cette discontinuité de la manière la plus précise possible (le moins de points dans la transition), avec un débit nul, et d'autre part de calculer le plus précisément possible les états constants de part et d'autre de la discontinuité stationnaire. En effet la valeur de ces états a, entre autres, un impact, sur la précision de calcul des vitesses des ondes de choc et de détente, en amont et en aval de la marche, et donc sur la qualité de la prédiction éventuelle de phénomènes de déferlement, pouvant menacer des populations civiles.

Pour ce problème particulier des équations de Saint-Venant avec terme source, une classe de schémas a été développée et mise en oeuvre avec succès pendant la dernière décennie. Il s'agit de la classe des schémas d'équilibre, basés sur le respect d'une propriété de stationnarité. On peut citer les travaux de Bermudez [BV94], de Greenberg et Leroux [GL96b], de Leroux [Rou99], de Gosse [GL96a], et de Vazquez [VC99]. L'idée principale dans cette approche, est d'écrire un schéma assurant une représentation précise des états stationnaires. Cela implique un équilibre entre le terme de transport et le terme source, et se traduit par le décentrement de ce dernier.

Dans T. Gallouët, J. M. Herard, N. Seguin [GHS03], les auteurs considèrent un exemple intéressant de systèmes non homogènes : l'écoulement en eau peu profonde sur une topographie déformée. Supposant un fond plat par morceaux, (voir Chinnayya et Le Roux [ACS04], les auteurs développent un schéma numérique non conservatif adéquat, basé sur la solution approchée de ce problème particulier de terme source. Une exploitation ingénieuse est faite de la solution des problèmes linéarisés, en particulier à proximité des discontinuités de contact stationnaires situées au niveau du saut de la topographie. Des résultats très précis sont obtenus dans différentes configurations, comprenant en particulier, les cas d'occurrence de vide.

Un deuxième exemple physique de phénomènes représentés par un système d'équations non homogènes concerne celui des écoulements multiphasiques. En particulier, la simulation d'un dysfonctionnement dans une centrale nucléaire, peut amener à considérer des écoulements où sont présents à la fois la phase liquide et la phase vapeur de l'eau. On conçoit là aussi l'importance d'une bonne simulation numérique pour de tels phénomènes.

Il n'y a pas de consensus définitif sur le modèle physique à utiliser pour représenter les écoulement diphasiques.

Le débat se focalise notamment sur le choix de modèles à pression commune, ou bien de modèles où chaque phase a sa propre pression, quitte à compléter le modèle par des équations complémentaires fictives, servant juste à rééquilibrer les pressions.

Nous adopterons dans cette thèse le modèle à pression commune qui nous paraît plus réaliste. Cependant ce modèle pose une difficulté mathématique importante. En effet, si l'on n'intègre pas au modèle les termes sources représentant l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu (transferts de masse, de pressions, *etc*), ce qui serait réaliste mais alourdirait considérablement les calculs, on obtient un système d'équations, non homogène, mais également non hyperbolique. Ainsi la plupart des schémas numériques modernes et performants, basés sur des solveurs de Riemann, nécessitent le calcul des champs propres de la matrice jacobienne du système, et ne peuvent donc être utilisés sous leur forme originelle pour le traitement de tels systèmes.

Durant ces dernières années, de nombreux travaux tendant à pallier la difficulté mentionnée ci-dessus, ont été entrepris. On peut citer en particulier les travaux de Toumi et al. [KTS01], [CDT98], [TK96], consistant à rajouter un terme de pression interfaciale afin d'élargir le domaine d'hyperbolicité, pour ensuite mettre en oeuvre des solveurs de type Roe ([Roe81]) utilisant non pas la matrice jacobienne exacte du système, mais une matrice proche qui en est issue, via un développement asymptotique, en terme de rapport de densités vapeur et liquide, de l'ordre du millièème dans ce cas là.

Par ailleurs dans [GKC96] J.-M.Ghidaglia, Le Coq et Kumbaro ont développé un schéma utilisant le flux caractéristique, ce qui permet la simulation numérique des écoulements diphasiques monodimensionnels [GKC01] et multidimensionnels [Bou98].

Précisons que les méthodes citées, se fondent pour l'essentiel sur des solveurs approchés de Riemann [Roe81]. Cela implique la détermination des champs propres d'une matrice jacobienne approchée associée au système. Cette détermination se fait généralement, dans le cas des systèmes diphasiques par exemple, par le biais de calculs approximatifs plus ou moins ardu, et conduit à varier le traitement en fonction du régime d'écoulement considéré. Cela peut être coûteux mais incontournable pour des écoulements relativement complexes.

Cependant, pour une large gamme de systèmes non homogènes, incluant des écoulements diphasiques, et des écoulements avec termes sources (éventuellement non bornés), on peut envisager de développer des schémas n'ayant pas recours aux calculs complexes évoqués plus haut.

Dans l'article de Paillère H., Corre C., Garcia Cascales J.R., [PCC03], les auteurs proposent l'extension de la méthode AUSM+ (Advection Upwind Splitting Scheme) de Liou [Lio96, LJS93] à un modèle diphasique compressible. C'est un exemple de schéma qui n'exige aucune analyse caractéristique par décomposition champs par champs, l'idée principale étant la décomposition du flux numérique en une partie convective associée au flux de masse, et un terme de pression. Par conséquent les auteurs évitent ici le recours à un solveur de Riemann linéarisé. Cependant, la méthode nécessite l'évaluation de quantités moyennes (vecteurs d'advection, pression, quantité de mouvement) employant des fonctions polynômes, ce qui peut être coûteux en temps dans certains cas.

Plus récemment F. De Vuyst dans [Vuy04] a proposé un schéma hybride, s'écrivant comme une combinaison astucieuse, basée sur le contrôle de l'entropie, du flux numérique de Lax-Friedrich du premier ordre et du flux de Lax-Wendroff. Ce schéma a été appliqué avec succès pour des problèmes monophasiques et diphasiques, dans des configurations monodimensionnelles et bidimensionnelles sur maillage cartésien.

Notre but dans ce travail est de considérer une classe particulière de systèmes non conservatifs, à savoir ceux pour lesquels on suppose que la solution du problème associé de Riemann est autosimilaire. Cette classe de problèmes est assez large cependant, et peut contenir divers phénomènes tels que les écoulements diphasiques, ou les écoulements en eau peu profonde avec topographie irrégulière.

Nous nous appuyons pour cela sur le schéma Solveur de Riemann Non Homogène(SRNH) proposé par F. Benkhaldoun [Ben02], que nous modifions, en introduisant une vitesse de Rusanov, dans le but de l'extension au cas bidimensionnel. En effet, comme on le

rappellera par la suite, le schéma (SRNH) est constitué de deux étapes, dont la première, que nous avons appelée étape prédicteur, consiste à écrire à l'interface de deux cellules, une approximation décentrée de la solution approchée faisant intervenir un paramètre scalaire $(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)$.

La plan général de cette thèse est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques propriétés des lois de conservation, et proposons une approche de la problématique des systèmes non homogènes. Nous présentons ensuite les problèmes traités : les équations de Saint-Venant, les équations d'Euler et les systèmes régissant l'écoulement diphasique à pression commune.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons la construction de la méthode des volumes finis, et présentons quelques schémas des volumes finis récemment proposés pour la simulation numérique de systèmes hyperboliques non homogènes.

Le troisième chapitre est consacré au développement d'un nouveau schéma aux volumes finis de type Prédicteur-Correcteur peu coûteux, n'ayant pas recours à la décomposition des champs de la matrice jacobienne, baptisé (*SRNHR*) (Solveur de Riemann non Homogène Rusanov). Ce schéma est basé sur le schéma (*SRNH*) [Ben02], dans lequel la vitesse numérique $(\frac{\Delta x}{\Delta t})$ a été remplacée par une vitesse de Rusanov locale, en vue de son extension au cas bidimensionnel.

Au chapitre quatre, l'analyse mathématique des schémas de Rusanov et (*SRNHR*) dans le cas monodimensionnel homogène est menée. Nous rappelons quelques définitions des propriétés des schémas numériques au sens des différences finies et volume finis, et ensuite, nous déterminons la condition de stabilité pour les schémas considérés dans le cas non linéaire. L'analyse de stabilité du schéma (*SRNHR*) met en évidence le fait que le paramètre $(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)$ contrôle la diffusion, et qu'en fonction de sa valeur le schéma peut être formellement d'ordre un ou d'ordre deux. Cela nous amène à proposer une stratégie de détermination locale de ce paramètre basée sur la théorie des limiteurs, et qui se révèle très efficace.

L'extension de ce schéma au cas bidimensionnel, en particulier sur des maillages non structurés a abouti à des difficultés nouvelles, mettant en question la consistance et la précision des méthodes d'approximations des gradients aux interfaces, pour des maillages non réguliers. Cela nous conduit au chapitre cinq à mener une analyse des propriétés citées ci-dessus, pour l'instant dans le cas monodimensionnel sur maillage non uniforme, ceci afin d'obtenir une première approche sur la qualité des différentes méthodes d'approximation proposées.

Le sixième chapitre est consacré dans sa première moitié aux propriétés du schéma (*SRNHR*). On y montre en particulier que ce schéma respecte la propriété de conservation de l'état stationnaire introduite par Bermúdez et Vazquez [BV94], [BDDV98]. La deuxième moitié du chapitre est consacrée au traitement des conditions aux limites des systèmes considérés, via les invariants de Riemann, lorsque les schémas de Roe, Rusanov et (*SRNHR*) sont utilisés.

Dans le septième chapitre, on applique le schéma ($SRNHR$) à la simulation numérique des systèmes monophasiques homogènes et non homogènes, pour des cas monodimensionnels et bidimensionnels, en menant en particulier une étude de convergence numérique via la détermination des courbes d'erreurs.

Enfin, le huitième et dernier chapitre est consacré à la validation numérique du schéma ($SRNHR$) pour les système non hyperboliques et non conservatifs, tels que les écoulements diphasiques à pression commune. Nous avons effectué la simulation numérique du problème de Ransom dans le cas monodimensionnel comme dans le cas bidimensionnel.

Bibliographie

- [AB01] F. Alcrudo and F. Benkhaldoun, *Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step*, Comput. & Fluids **30** (2001), no. 6, 643–671.
- [ACS04] A.-Y. Le Roux A. Chinnayya and N. Seguin, *A well-balanced numerical scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon*, International journal on finite volume (2004).
- [BDDV98] A. Bermúdez, A. Dervieux, J.-A. Desideri, and M. E Vázquez, *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **155** (1998), no. 1-2, 49–72.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for nonhomogeneous systems*, Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002), Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille, 2002, pp. 255–262 (electronic).
- [Bou98] M. Boucker, *Modélisation numérique multidimensionnelle d’écoulements diphasiques liquide-gaz en régimes transitoire et permanent : méthodes et applications*, Ph.D. thesis, Ecole normale supérieure de cachan, 1998.
- [BV94] A. Bermudez and M.E Vazquez, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Comput. & Fluids **23** (1994), no. 8, 1049–1071.
- [CDT98] J. Cortes, A. Debussche, and I. Toumi, *A density perturbation method to study the eigenstructure of two-phase flow equation systems*, J. Comput. Phys. **147** (1998), no. 2, 463–484.
- [GHS03] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin, *Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 4, 479–513.
- [GKC96] J.M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode “volumes finis” à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [GKC01] J.-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method*, Eur. J. Mech. B Fluids **20** (2001), no. 6, 841–867.
- [GL96a] L. Gosse and A.Y. Leroux, *Un schéma équilibré adapté aux lois de conservation scalaires non-homogènes*, C.R. Acad. Sci. paris **323** (1996), 543–546.

- [GL96b] J.M. Greenberg and A.Y. Leroux, *A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), no. 1, 1–16.
- [KTS01] A. Kumbaro, I. Tourni, and V. Seignole, *Flux schemes for the numerical simulation of two phase flows*, Computational fluid dynamics, 2000 (Kyoto), Springer, Berlin, 2001, pp. 621–626.
- [Lio96] M.-S. Liou, *A sequel to AUSM : AUSM⁺*, J. Comput. Phys. **129** (1996), no. 2, 364–382.
- [LJS93] M.-M. Liou and J. Christopher Jr. Steffen, *A new flux splitting scheme*, J. Comput. Phys. **107** (1993), no. 1, 23–39.
- [PCC03] H. Paillère, C. Corre, and J.R. García Cascales, *On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 6, 891–916.
- [Roe81] P.L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, et difference schemes*, J. Comput. Phys. **43** (1981), no. 2, 357–372.
- [Rou99] A.Y. Le Roux, *Riemann solvers for some hyperbolic problems with a source term*, Actes du 30ème Congrès d'Analyse Numérique : CANum '98 (Arles, 1998), ESAIM Proc., vol. 6, Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1999, pp. 75–90 (electronic).
- [TK96] I. Tourni and A. Kumbaro, *An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model*, J. Comput. Phys. **124** (1996), no. 2, 286–300.
- [VC99] M.E. Vázquez-Cedón, *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, Journal of computational physics **148** (1999), 497–526.
- [Vuy04] F. De Vuyst, *Stable and accurate hybrid finite volume methods based on pure convexity arguments for hyperbolic systems of conservation law*, J. Comput. Phys. **193** (2004), no. 2, 426–468.

Chapitre 1

Présentation générale

On s'intéresse à des schémas numériques performants permettant le calcul de solutions de problèmes d'évolution, tels que ceux modélisant des écoulements de fluides. Avant de présenter ces schémas, nous allons rappeler quelques caractéristiques importantes concernant les problèmes hyperboliques, caractéristiques qui joueront un rôle très important sur la façon de construire les schémas associés.

1.1 Lois de bilan

Les équations régissant les écoulements de fluides apparaissent en général sous la forme de lois de bilan, représentées par des systèmes d'équations aux dérivées partielles, dépendant du temps, usuellement non linéaires, en dimension d d'espace et prenant la forme suivante :

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial F_j(U(x, t))}{\partial x_j} = Q(x, U), \quad (1.1)$$
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in D \subset \mathbb{R}^d, t > 0,$$

où $U : D \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \Omega$ est un vecteur à p dimensions, décrivant les variables conservatives. Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^p et les fonctions F_j ($1 \leq j \leq d$) sont des fonctions de flux.

Le terme $Q(x, U)$ représente ici la partie non homogène du système : il peut décrire, par exemple, des termes sources ou des termes non conservatifs.

Au système d'équations (1.1) sont rajoutées la condition initiale $U(x, 0) = U_0(x)$ et éventuellement des conditions aux limites.

Ces équations peuvent modéliser aussi bien des écoulements en eau peu profonde avec frottements et pente du fond (système de Saint-Venant), que des écoulements diphasiques réactifs ou non.

1.1.1 Propriétés des lois de bilan dans le cas homogène

Dans le cas où on ne prend en compte que la partie homogène du système (1.1), (i.e $Q(x, U) = 0$), on retrouve les équations de lois de conservation classiques. Par exemple, pour les équations de Saint-Venant, cela correspond à un écoulement sans frottement dans un canal à fond plat.

Ces systèmes mènent, dans les cas usuels, à des problèmes bien posés dont nous rappelons ici les principales caractéristiques :

Hyperbolicité

Soit $A_j(U)$ la matrice jacobienne de la fonction $F_j(U)$:

$$A_j(U) = \left(\frac{\partial F_j(U)}{\partial U} \right)_{1 \leq j \leq d}.$$

Définition 1.1.1 *Le système (1.1) est dit hyperbolique si pour tout $n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{R}^d$, la matrice*

$$A(U, n) = \sum_{j=1}^d n_j A_j(U)$$

est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont réelles.

Si de plus, ces valeurs propres sont distinctes, le système est dit strictement hyperbolique.

On ordonne ces valeurs propres de façon croissante :

$$\lambda_1(U, n) \leq \lambda_2(U, n) \leq \dots \leq \lambda_p(U, n)$$

où $\lambda_j(U, n)$ est la j-ième valeur propre de $A(U, n)$.

On note $l_j(U, n)$ et $r_j(U, n)$ les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_j(U, n)$, à gauche et à droite respectivement.

Conservativité

On dira qu'un système d'équations est conservatif s'il peut s'écrire sous forme de divergence nulle dans le repère spatio-temporel, par exemple : $\text{div} \vec{V} = 0$ où $\vec{V} = \begin{pmatrix} U \\ F(U) \end{pmatrix}$.

Définition des caractéristiques

On considère le cas scalaire homogène de dimension un

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \tag{1.2}$$

dans une région où la solution est C^1 . L'équation (1.2) peut également s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

D'autre part, on peut également écrire la différentielle de u

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

On en déduit alors que u est constante ($\frac{du}{dt} = 0$) sur la courbe du plan (x, t) d'équation $\frac{dx}{dt} = f'(u)$ définie comme étant la courbe caractéristique.

Dans le cas d'un système 1D homogène, le système à p équations (1.1) s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0. \quad (1.4)$$

Si on suppose que la fonction F ne dépend que de U , on peut décomposer l'équation (1.4) dans la base formée par les éléments propres :

$$l_k(U) \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_k(U) l_k(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq k \leq p \quad (1.5)$$

ou encore

$$\begin{aligned} l_k(U) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_k(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow l_k(U) \cdot \frac{d_k U}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d_k U}{dt} \in \text{Vect}(r_j(U)), \forall j \neq k, &\quad (\text{car } l_k(U) \cdot r_j(U) = \delta_{jk}). \end{aligned}$$

Définition 1.1.2 On appelle k -caractéristique du système (1.4) les courbes du plan (x, t) d'équation : $\frac{dx}{dt} = \lambda_k(U(x, t))$, $1 \leq k \leq p$.

Invariants de Riemann :

Définition 1.1.3 Soit G un sous espace de \mathbb{R}^p et $1 \leq j \leq p$. La fonction W définie de G dans \mathbb{R} est un j -invariant de Riemann de (1.4), si $\nabla W(U) \cdot r_j(U) = 0$, $\forall U \in G$.

Proposition 1.1.4 Soit $1 \leq k \leq p$; si W_k est un j -invariant de Riemann pour tout $j \neq k$, alors W_k est constante le long de la k -caractéristique.

Preuve : D'après la définition précédente, on a

$$\begin{aligned}
 & \nabla W_k(U) \parallel l_k(U) \\
 \Leftrightarrow & \nabla W_k(U) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_k(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial W_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial W_k}{\partial x} = \frac{d_k W_k(U)}{dt} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.1.2 Problématique des systèmes non homogènes

Dans beaucoup de domaines de la physique, les équations aux dérivées partielles décrivant des processus physiques, comportent des termes sources. Cela correspond en général, pour les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, à la prise en compte de réactions chimiques, ou de forces extérieures. Tel est le cas par exemple, des phénomènes de combustion, de pollution, ou d'écoulement d'eau avec frottement, sur fond non plat.

Ainsi, dans le cas d'un écoulement en eau peu profonde avec un fond discontinu (en forme de marche), le terme source (fonction de la pente du fond), devient non borné, ce qui se traduit par une difficulté numérique majeure. En particulier, la discrétisation des termes sources par une méthode explicite et centrée conduit à des instabilités numériques. Un traitement particulier du terme source est donc requis.

On mentionne par exemple les travaux de Roe [Roe87] qui a montré que le terme source doit être discrétisé de la même façon que le flux numérique. Glaister [Gla90] a appliqué l'idée de Roe aux équations de Saint-Venant, dans le cas d'un fond plat. Leveque et Yee [LY90] ont obtenu des résultats numériques sur l'équation des ondes avec terme source. Bermudez et Vazquez [BV94] ont donné des exemples de discrétisation du terme source, basés sur les schémas équilibrés.

Durant ces dernières années, beaucoup de papiers ont été consacrés au traitement du terme source ; on peut citer, par exemple, les travaux de Le Roux et Gosse [GL96], F. Benkhaldoun et A. Chalabi [FB97], Bermudez et al [BDDV98], F. Alouges, J.-M. Ghidaglia et M. Tadjchman [FA99], Vazquez-Cendon [VC99], L. Monthe [Mon01], F. Benkhaldoun [Ben02], Gallouët et al [GHS03], E. Lorin et V. Seignole [LS03]...

L'étude des problèmes diphasiques aboutit également à considérer des systèmes non homogènes. En fonction du modèle physique adopté, le système d'équations peut-être conditionnellement hyperbolique et donc correspondre à un problème mathématique mal posé. C'est en particulier le cas du modèle à pression commune étudié dans cette thèse. Toutefois, ce modèle émane d'une grande simplification des phénomènes physiques mis en jeu. Le modèle à pression commune est un bon modèle tenant compte de la réalité bien que de nombreux termes physiques soient omis (dans le terme source). Le fait que ce problème soit mathématiquement mal posé rend ardue la conception de schémas numériques.

1.2 Problèmes traités

1.2.1 Les équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant découlent des lois de bilan pour un fluide incompressible. Elles régissent un écoulement à surface libre en eau peu profonde, soumis à la gravité. Elles sont obtenues en intégrant les équations de Navier-Stokes (tridimensionnelles) suivant la direction verticale (direction de la force de gravité), en supposant différentes hypothèses fondamentales dont celle de la pression hydrostatique. Le modèle de Saint-Venant est appelé en anglais “shallow water equations”. Les applications les plus courantes du modèle de Saint-Venant concernent la rupture de barrage, les crues, l’hydraulique des fleuves, les systèmes d’irrigation, les écoulements marins...(voir figure (1.1)).

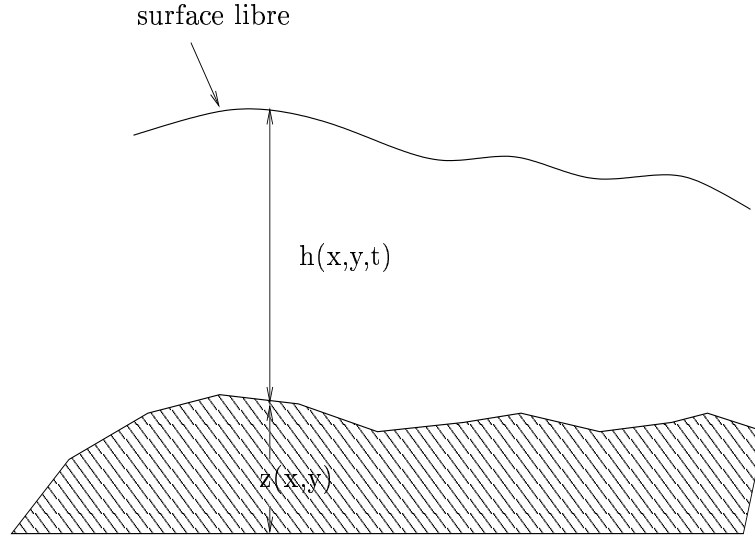


FIG. 1.1 – Ecoulement à surface libre

Dans le cas où on néglige les frottements aux bords d’un canal rectangulaire, les lois de conservation des équations de Saint-Venant (à deux dimensions d’espace) s’écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = Q(U) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}$$

et

$$Q(U) = gh \begin{pmatrix} 0 \\ (Q_{ox} - Q_{fx}) \\ (Q_{oy} - Q_{fy}) \end{pmatrix}.$$

U représente le vecteur des variables conservatives, h est la hauteur de l'eau, u et v sont respectivement les vitesses d'écoulement du fluide dans les directions x et y , g la constante de gravité.

$Q_{ox} = -\frac{dz}{dx}$ et $Q_{oy} = -\frac{dz}{dy}$ sont respectivement les pentes du fond du canal, dans les directions x et y , Q_{fx} et Q_{fy} sont respectivement les termes de frottement au fond dans les directions x et y et $z(x, y)$ décrit le fond de l'eau.

Les termes de frottement Q_{fx} et Q_{fy} sont donnés par les relations empiriques de Manning :

$$Q_{fx} = \frac{N^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}$$

$$Q_{fy} = \frac{N^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}},$$

où $N = \sqrt{k/(\rho g)}$ est le coefficient de Manning; k est une constante et ρ représente la densité (pour plus de détails, on pourra, par exemple, consulter [Woo92]).

On peut réécrire le système (1.7) sous la forme non conservative suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A_1(U) \frac{\partial U}{\partial x} + A_2(U) \frac{\partial U}{\partial y} = Q(U) \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \end{cases} \quad (1.8)$$

où $A_1(U)$ et $A_2(U)$ sont les matrices jacobienues des fonctions flux données par

$$A_1(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \text{ et } A_2(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix}.$$

Pour un vecteur donné $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$, on peut définir la matrice jacobienne dans la direction \vec{n} sous la forme (voir par exemple, [GR96]) :

$$\begin{aligned} A(U, \vec{n}) &= A_1(U)n_x + A_2(U)n_y \\ &= \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ -uvn_x + (c^2 - v^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $c = \sqrt{gh}$.

Ce système est hyperbolique. Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction flux sont données par :

$$\begin{aligned}\lambda_1(U, \vec{n}) &= \vec{V} \cdot \vec{n} - c, \\ \lambda_2(U, \vec{n}) &= \vec{V} \cdot \vec{n}, \\ \lambda_3(U, \vec{n}) &= \vec{V} \cdot \vec{n} + c,\end{aligned}$$

où $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, représente le vecteur vitesse.

Les vecteurs propres à droite sont :

$$r_1(U, \vec{n}) = \begin{pmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{pmatrix}, r_2(U, \vec{n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_y \\ n_x \end{pmatrix} \text{ et } r_3(U, \vec{n}) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{pmatrix}.$$

Nous nous intéresserons en particulier au cas où le frottement est négligeable, mais où le fond du canal possède une forme de marche. Cela implique que la côte du fond est donnée par une fonction de Heaviside et que le terme source est donc singulier (masse de Dirac) ; ceci constitue la principale difficulté à traiter d'un point de vue numérique.

Solution analytique du problème de Riemann en dimension un

Dans le cas des équations de Saint-Venant homogènes unidimensionnel, on peut déterminer une solution analytique du problème de Riemann associé. Pour cela, on utilise en particulier la méthode des caractéristiques. Ce traitement a été largement décrit, notamment en ce qui concerne le cas de la rupture de barrage ([Lev92], [AB01].)

Dans le cas où on considère le problème de Riemann associé aux équations (1.7) écrites en dimension un d'espace et assorties de la condition initiale discontinue en un point 0 :

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l = (h_l, \quad h_l u_l)^t & \text{si } x < 0 \\ U_r = (h_r, \quad h_r u_r)^t & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec $h_l > h_r$ et $u_l = u_r = 0$, la solution analytique est constituée d'une onde de raréfaction se propageant vers la gauche et d'une onde de choc, entre un état U_m et l'état U_r , se propageant vers la droite.

L'état $U_m = (h_m, \quad h_m u_m)^t$ est défini par

$$u_m = (h_r - h_l) \sqrt{\left(\frac{g}{2} \frac{(h_r + h_m)}{h_r h_m} \right)},$$

où $\sqrt{h_m}$ est solution de l'équation $(h_r - x^2)^2(h_r + x^2) - 8h_r x^2(\sqrt{h_l} - x)^2 = 0$.

La vitesse du choc s vérifie l'égalité

$$s[U_r - U_m] = [f(U_r) - f(U_m)].$$

A un instant t donné, on définit

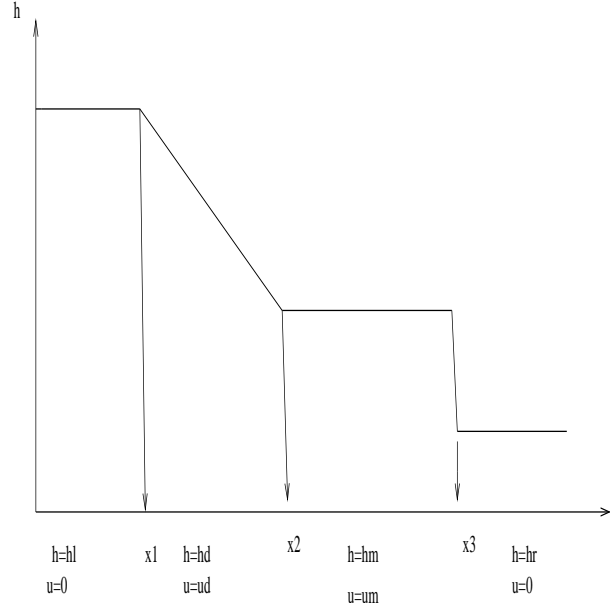


FIG. 1.2 – Solution analytique

$$x_1 = -\sqrt{gh_l}t, \quad x_2 = u_m - \sqrt{gh_m}t \quad \text{et} \quad x_3 = st.$$

La solution est alors construite de la manière suivante :

Si $x \leq x_1$ alors $u = u_l = 0$ et $h = h_l$.

Si $x_1 \leq x \leq x_2$

$$h(\xi) = h_d(\xi) = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_l} - \xi \right)^2$$

$$u(\xi) = u_d(\xi) = \frac{2}{3} \left(\xi + \sqrt{gh_l} \right),$$

où on a posé $\xi = \frac{x}{t}$.

Si $x_2 \leq x \leq x_3$ alors $u = u_m$ et $h = h_m$.

Si $x \geq x_3$ alors $u = u_r = 0$ et $h = h_r$.

Ces solutions analytiques vont nous permettre de valider les schémas numériques que nous proposerons dans la suite de ce travail.

1.2.2 Les équations d'Euler

Lorsque l'on fait comme hypothèse que le fluide est compressible mais non visqueux (on néglige l'effet de la viscosité : $\nu = 0$ dans les équations de Navier-Stokes), on obtient les équations d'Euler. Ces équations décrivent les principes de conservation de la masse, de la

quantité de mouvement et de l'énergie. Dans le cas bidimensionnel, elles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \end{cases} \quad (1.9)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (E + P)u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (E + P)v \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse des gaz parfaits nous fournit une équation d'état reliant la pression à la densité :

$$P = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right),$$

ce qui nous permet de fermer le système.

U représente le vecteur des variables conservatives, ρ , P , u , v et E sont respectivement la densité du gaz, la pression, la vitesse dans les directions x , y et l'énergie totale.

Le système (1.9) peut également s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A_1(U) \frac{\partial U}{\partial x} + A_2(U) \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \end{cases} \quad (1.10)$$

où $A_1(U)$ et $A_2(U)$ sont les matrices jacobiniennes des fonctions flux définies par

$$A_1(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1(u, v) & (3 - \gamma)u & (1 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -ua_2(u, v) & a_3(u, v) & (1 - \gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix}$$

et

$$A_2(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ a_5(u, v) & (1 - \gamma)u & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ -va_2(u, v) & (1 - \gamma)uv & a_4(u, v) & \gamma u \end{pmatrix},$$

avec $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ est la vitesse du son et

$$\begin{aligned}
a_1(u, v) &= \frac{1}{2} ((\gamma - 3)u^2 + (\gamma - 1)v^2) \\
a_2(u, v) &= \left(\frac{c^2}{\gamma - 1} + (1 - \frac{\gamma}{2})(u^2 + v^2) \right) \\
a_3(u, v) &= \left(\frac{c^2}{\gamma - 1} - (\gamma - \frac{3}{2})u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right) \\
a_4(u, v) &= \left(\frac{c^2}{\gamma - 1} - (\gamma - \frac{3}{2})v^2 + \frac{1}{2}u^2 \right) \\
a_5(u, v) &= \frac{1}{2} ((\gamma - 3)v^2 + (\gamma - 1)u^2).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on peut définir la matrice jacobienne dans une direction donnée $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ sous la forme $A(U, \vec{n}) = A_1(U)n_x + A_2(U)n_y$.

Le problème (1.9) est hyperbolique. Les valeurs propres de la matrice Jacobienne de la fonction flux sont données par :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(U, \vec{n}) &= \vec{V} \cdot \vec{n} - c, \\
\lambda_2(U, \vec{n}) &= \lambda_3(U, \vec{n}) = \vec{V} \cdot \vec{n} \\
\lambda_4(U, \vec{n}) &= \vec{V} \cdot \vec{n} + c,
\end{aligned}$$

et les vecteurs propres à droite correspondants sont :

$$\begin{aligned}
r_1(U, \vec{n}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \\ \frac{u}{c} - n_x \\ \frac{v}{c} - n_y \\ \frac{u^2 + v^2}{2c} - \vec{V} \cdot \vec{n} + \frac{c}{\gamma - 1} \end{pmatrix}, \quad r_2(U, \vec{n}) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{u^2 + v^2}{2} \end{pmatrix}, \\
r_3(U, \vec{n}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ n_y \\ -n_x \\ un_y - vn_x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r_4(U, \vec{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \\ \frac{u}{c} + n_x \\ \frac{v}{c} + n_y \\ \frac{u^2 + v^2}{2c} + \vec{V} \cdot \vec{n} + \frac{c}{\gamma - 1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On connaît les invariants de Riemann pour les équations d'Euler, en dimension un. Ils sont donnés par (voir par exemple J.-M. Ghidaglia et F. Pascal [GP02], E. Godlewski et P.-A. Raviart [GR96])

$$\begin{aligned}
W_1(U) &= u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \\
W_2(U) &= \frac{p}{\rho^\gamma}, \\
W_3(U) &= u + \frac{2c}{\gamma - 1}.
\end{aligned}$$

Il existe un nombre important de cas-tests pertinents, utilisant les équations d'Euler, ce qui permet de tester les codes numériques.

1.2.3 Les modèles diphasiques

Un écoulement diphasique est un écoulement où le fluide peut se trouver dans deux phases différentes. Par exemple, on peut étudier un écoulement où de l'eau se trouve à la fois sous forme liquide et gazeuse. La complexité de ce type de problème physique est due en particulier au fait qu'il est difficile de trouver un bon modèle mathématique qui gouverne un système diphasique, chacun valide pour une configuration physique particulière. Ces modèles mathématiques sont basés à la fois sur des lois universelles (principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, *etc* ...) et sur des lois de comportement qui servent essentiellement à fermer le système d'équations.

Les applications des écoulements diphasiques sont nombreuses. On retrouve par exemple de tels systèmes en thermomécanique industrielle (coeurs et générateurs de vapeur de réacteurs nucléaires à eau pressurisée, pipelines de transport d'effluents pétroliers, chambre des moteurs à combustion interne,), en biologie, dans les domaines de la santé, de la chimie (pour la lubrification et la distillation, par exemple).

A notre connaissance, Isshi [Ish75] est le premier à avoir proposé un système d'équations aux dérivées partielles qui gouvernent un écoulement diphasique. Delhay et Achard dans [DA76] ainsi que Lahey et Drew dans [DL79] ont développé des systèmes, mais qui possèdent des valeurs propres complexes.

Diverses recherches dans ce domaine ont permis de classifier ces écoulements diphasiques. On donne ici quelques modèles fréquemment utilisés :

Le modèle bi-fluides à deux pressions : Dans ce modèle, on considère que les deux phases ont des pressions différentes. Ce modèle est hyperbolique, mais la pression peut être discontinue à l'interface [RH88].

Le modèle vitesse de dérive “two-phases drift-flux” : Ce modèle est construit à partir des équations de conservation de la masse pour chacune des deux phases ; la quantité de mouvement, quant à elle, est commune aux deux phases. Une des difficultés principales réside dans le fait qu'il est difficile de déterminer des lois d'états permettant de fermer ce système.

Ce modèle est hyperbolique et conservatif, mais le calcul des valeurs propres est délicat [KF02] .

Le modèle bi-fluide à pression commune : Ce modèle est basé sur les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour chacune des phases qui possèdent la même valeur de la pression. C'est un système à huit équations (en dimension deux). Dans le cas isotherme, ce modèle ne dépend que des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et on constate alors que le système est généralement non hyperbolique. Au mieux il n'est que conditionnellement hyperbolique. Une des difficultés numériques relatives à ce modèle se situe dans le fait que la plupart des schémas décentrés requièrent le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres du flux physique, ce qui n'est pas réalisable ici, ce modèle admettant des valeurs propres complexes.

De nombreux auteurs (on peut citer, par exemple [RLF80], [TK96], [Bes97]) ont pro-

posé de modifier le système bi-fluides non hyperbolique en rajoutant, dans les équations de la quantité de mouvement, une pression interfaciale ou encore de la masse virtuelle, afin de rendre le système hyperbolique. Plusieurs formulations de la pression interfaciale ainsi que de la masse virtuelle ont été proposées.

La conception de schémas permettant la résolution numérique de ces différents modèles diphasiques reste actuellement encore très délicate et beaucoup de questions sont encore sans réponse.

D'un point de vue numérique, une des difficultés rencontrées dans ce type de problèmes provient du fait que la plupart des modèles proposés dans la littérature présentent un caractère complexe dans les régions physiquement intéressantes.

Le schéma VFFC [GKC96] est particulièrement bien adapté à ce type de problèmes. Dans ce domaine, on peut citer par exemple les travaux de J. Cortes, A. Debussche et I. Toumi [CDT98], M. Boucker [Bou98], A. Kumbaro, I. Toumi et V. Seignole [KTS01], F. Benkhaldoun [Ben02].

Dans sa thèse, El Amin [Ami97] a réalisé des simulations numériques de modèles d'écoulements diphasiques en déséquilibre, décrits par un système à six équations, en utilisant une technique originale de décomposition du système en deux étapes : l'étape "hydrodynamique" pour laquelle chaque phase possède une pression différente (deux sous-systèmes découplés sont alors résolus). La deuxième étape consiste à rétablir l'égalité des deux pressions. Le schéma de Roe ainsi que le schéma cinétique sont utilisés lors de ces deux étapes. Saurel et Abgrall dans [SA99] proposent un modèle bi-fluide à sept équations où des termes de relaxation de la vitesse et de la pression étaient inclus. Ce modèle nécessite un choix des coefficients de relaxation, et des termes de pression et vitesse d'interface. Quelques soient ces choix, le modèle était inconditionnellement hyperbolique.

Au niveau international, les codes de résolution des problèmes diphasiques les plus utilisés sont les deux codes américains RELAP et TRAC, et le code français CATHARE ; ces trois codes utilisent des modèles bi-fluides dont les valeurs propres sont complexes.

Dans le cadre des travaux présentés ici, on s'intéressera au modèle d'écoulement diphasique liquide-vapeur.

Le système étudié dans le cadre des travaux réalisés ici, est constitué des équations de bilan de masse et de quantité de mouvement pour chacune des phases qui ont toutes les deux la même pression.

Dans le cas bidimensionnel, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mu_k \rho_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_k \rho_k \vec{U}_k) = 0 \\ \frac{\partial(\mu_k \rho_k \vec{U}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_k \rho_k \vec{U}_k \otimes \vec{U}_k) = -\mu_k \nabla P + \mu_k \rho_k g, \end{cases} \quad (1.11)$$

∇ . désignant l'opérateur de divergence et ∇ du gradient.

k est égal à v ou à l , v désignant l'état vapeur et l l'état liquide.

μ_k est le taux de présence locale de la phase k : $\mu_v + \mu_l = 1$.

ρ_k est la densité de la phase k et $\vec{U}_k = (u_k, v_k)^t$ la vitesse de la phase k .

P est la pression commune.

Afin de fermer le système, on ajoute des lois d'état. Dans le cas isotherme, on prend

$$P = A_v \rho^\gamma \quad \text{et} \quad \rho_l = K_l P^a,$$

où γ est le rapport des capacités calorifiques du gaz à pression constante et à volume constant ; A_v , K_l et a sont des constantes.

Bibliographie

- [AB01] F. Alcrudo and F. Benkhaldoun, *Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step*, Comput. & Fluids **30** (2001), no. 6, 643–671.
- [Ami97] K. El Amine, *Modélisation et analyse numérique des écoulements diphasiques en déséquilibre*, Ph.D. thesis, Paris 6, 1997.
- [BDDV98] A. Bermúdez, A. Dervieux, J.-A. Desideri, and M. E Vázquez, *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **155** (1998), no. 1-2, 49–72.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for nonhomogeneous systems*, Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002), Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille, 2002, pp. 255–262 (electronic).
- [Bes97] D. Bestion, *The physical closure laws in the cathare code*, Nucl.Eng.Design (1997), no. 124, 229–245.
- [Bou98] M. Boucker, *Modélisation numérique multidimensionnelle d’écoulements diphasiques liquide-gaz en régimes transitoire et permanent : méthodes et applications*, Ph.D. thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 1998.
- [BV94] A. Bermudez and M.E Vazquez, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Comput. & Fluids **23** (1994), no. 8, 1049–1071.
- [CDT98] J. Cortes, A. Debussche, and I. Toumi, *A density perturbation method to study the eigenstructure of two-phase flow equation systems*, J. Comput. Phys. **147** (1998), no. 2, 463–484.
- [DA76] J.M. Delhay and J.L. Achard, *On the averaging operators introduced in two-phase flow modelling*, Proc. CSNI Specialist meeting on transient two phase flow (Canada), Toronto, 1976.
- [DL79] D.A. Drew and R.T. Lahey, *Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equation*, Int. J. Multiphase Flow **5** (1979), 243–264.
- [FA99] M. Tajchman F. Alouges, J.-M. Ghidaglia, *On the interaction of upwinding and forcing for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, Tech. report, CMLA, 9907, 1999.

- [FB97] A. Chalabi F. Benkhaldoun, *Characteristic based scheme for conservation laws with source terms*, Tech. Report 95.13, Université Paul Sabatier, Mathématique pour l'Industrie et la physique, 1997.
- [GHS03] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin, *Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography*, *Comput. & Fluids* **32** (2003), no. 4, 479–513.
- [GKC96] J.M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode “volumes finis” à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [GL96] L. Gosse and A.Y. Leroux, *Un schéma équilibré adapté aux lois de conservation scalaires non-homogènes*, *C.R. Acad. Sci. paris* **323** (1996), 543–546.
- [Gla90] P. Glaister, *Approximate Riemann solutions of the two-dimensional shallow-water equations*, *J. Engrg. Math.* **24** (1990), no. 1, 45–53.
- [GP02] J.-M. Ghidaglia and F. Pascal, *Flux boundary conditions for hyperbolic systems of conservations laws in the finite volume framework*, *Finite volumes for complex applications, III* (Porquerolles, 2002), *Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille, 2002*, pp. 327–334 (electronic).
- [GR96] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Ish75] M. Ishii, *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flows*, *Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France*, Eyrolle, Paris, 1975.
- [KF02] Kenneth Hvistendahl Karlsen and Kjell K. Fjelde, *High-resolution hybrid primitive-conservative upwind schemes for the drift flux model*, *Comput. & Fluids* **31** (2002), 335–367.
- [KTS01] A. Kumbaro, I. Toumi, and V. Seignole, *Flux schemes for the numerical simulation of two phase flows*, *Computational fluid dynamics, 2000* (Kyoto), Springer, Berlin, 2001, pp. 621–626.
- [Lev92] Randall J. Leveque, *Numerical methods for conservation laws*, second ed., *Lectures in Mathematics ETH Zürich*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. MR 92m :65106
- [LS03] E. Lorin and V. Seignole, *Convection systems with stiff source terms*, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **13** (2003), no. 7, 971–1018.
- [LY90] R.J. Leveque and H.C. Yee, *A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms*, *J. Comput. Phys.* **86** (1990), no. 1, 187–210.
- [Mon01] L.A. Monthe, *A study of splitting scheme for hyperbolic conservation laws with source terms*, *J. Comput. Appl. Math.* **137** (2001), no. 1, 1–12.
- [RH88] V.H. Ransom and D.L. Hicks, *Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow revisited. Correction to : “Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow” [J. Comput. Phys. **53** (1984), no. 1, 124–151; MR 85c :76059]*, *J. Comput. Phys.* **75** (1988), no. 2, 498–504.

- [RLF80] D.A. Drew R.T. Lahey, L.Y. Cheng and J.E. Flaherty, *The effect of virtual mass on the numerical stability of accelerating two-phase flows*, Int. J. of Multiphase flow **6** (1980), 281–294.
- [Roe87] P.L. Roe, *Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*, Nonlinear hyperbolic problems (St. Etienne, 1986), Lecture Notes in Math., vol. 1270, Springer, Berlin, 1987, pp. 41–51.
- [SA99] R. Saurel and R. Abgrall, *A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows*, J. Comput. Phys. **150** (1999), no. 2, 425–467.
- [TK96] I. Tounsi and A. Kumbaro, *An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model*, J. Comput. Phys. **124** (1996), no. 2, 286–300.
- [VC99] M.E. Vázquez-Cedón, *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, Journal of computational physics **148** (1999), 497–526.
- [Woo92] W.L. Wood, *Introduction to numerical methods for water resources*, Oxford Science, United States, 1992.

Chapitre 2

Développement de schémas numériques aux Volumes Finis pour des problèmes non homogènes

La méthode des volumes finis est bien adaptée aux problèmes des lois de conservation. En effet cette méthode se base sur la forme intégrale du système (équations de bilan) et permet le calcul de solutions discontinues d'opérateurs non linéaires, pour des problèmes évoluant dans des domaines quelconques. On peut remarquer que cette méthode peut être vue comme une méthode d'éléments finis où les fonctions tests coïncident avec les fonctions caractéristiques de chaque cellule.

Dans ce chapitre, avant de présenter quelques schémas numériques Volumes Finis permettant la résolution de systèmes hyperboliques non homogènes, on va rappeler la définition d'une solution au sens des distributions ainsi que la construction de la méthode des Volume Finis.

2.1 Présentation du problème ; formulation faible

Dans un domaine $D \subset \mathbb{R}$, le système hyperbolique précédemment présenté (1.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = Q(x, U), & \forall x \in D \subset \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ U(x, 0) = U_0(x), & \forall x \in D. \end{cases} \quad (2.1)$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit $U : D \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux, et supposons que Q soit borné. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

i) U est une solution de (2.1) au sens des distributions (ou solution faible).

ii) Sur tout domaine $R \subset D \times [0, +\infty[$:

$$\int_{\partial R} (Un_t + F(U)n_x) d\sigma = \int_R Q(x, U) dx dt,$$

iii)

1. U est une solution classique de (2.1) là où U est C^1 ,

2. U satisfait la condition de Rankine-Hugoniot le long des courbes de discontinuités :

$$s[U] = [F(U)].$$

Remarque concernant le cas où le terme source n'est pas borné :

Dans le cas où Q n'est pas borné, la condition de saut ci-dessus doit être reconsidérée. Par exemple, considérons le cas scalaire avec terme source simplifié suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = -\frac{dz(x)}{dx}, & \forall x \in D \subset \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in D. \end{cases} \quad (2.2)$$

En admettant que $z \in L^\infty(\mathbb{R})$, et en introduisant le vecteur $W = (u, z)^T$ et le flux $F(W) = (f(u) + z, 0)^T$, l'équation (2.2) prend la forme du système homogène suivant :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = 0.$$

Pour un tel système, on a la relation de saut classique $s[W] = [F(W)]$.

Cela se traduit par les deux relations de sauts : $s[u] = [f(u)] + [z]$, et $0 = s[z]$.

Ainsi, si z est au moins de classe C^0 (c'est-à-dire si le terme source est borné), alors $[z] = 0$ partout, et on retrouve alors la relation de saut $s[u] = [f(u)]$. Cela signifie que le terme source n'a donc pas d'influence sur la relation de saut dans ce cas.

En revanche, si $[z] \neq 0$ au moins en un point $x = x_0$, alors pour toute courbe de discontinuité passant par x_0 , nous avons une nouvelle forme de la relation de saut : $s[u] = [f(u)] + [z]$. Notons de plus, que dans ce cas simplifié, la relation de saut se réduit alors à $[f(u)] = -[z]$.

2.2 Méthode des Volumes Finis

2.2.1 Construction de la méthode en 1D

Pour construire la méthode des volumes finis, on utilise la forme intégrale de l'équation (2.1) sur le domaine $R \subset D \times [0, +\infty[$. Soit $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_t \end{bmatrix}$, le vecteur normal unitaire

extérieur à ∂R , frontière du domaine R .

En utilisant la proposition ii) du théorème 2.1.1, on a :

$$\int_{\partial R} (Un_t + F(U)n_x) d\sigma = \int_R Q(x, U) dx,$$

On discrétise le domaine en espace et en temps en subdivisant D en intervalles successifs : on pose $\Delta x_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$, $j \in \mathbb{Z}$, et $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, $n \in \mathbb{N}$.

On intègre l'équation (2.1) sur une cellule $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} & - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(U(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt + \\ & \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(x, t_{n+1}) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(U(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} Q(x, U) dx dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

et on choisit de prendre pour état moyen, la quantité

$$U_j^n = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(x, t_n) dx.$$

Enfin, on pose l'approximation

$$\phi(U_j^n, U_{j+1}^n) = F(U(x_{j+\frac{1}{2}}, t)). \quad (2.4)$$

ϕ représente le flux numérique à l'interface $x_{j+\frac{1}{2}}$, pour t compris entre t_n et t_{n+1} .

L'équation (2.3) devient :

$$\begin{aligned} & -\Delta x_j U_j^n + \Delta t_n \phi(U_j^n, U_{j+1}^n) + \Delta x_j U_j^{n+1} - \Delta t_n \phi(U_{j-1}^n, U_j^n) \\ & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} Q(x, U) dx dt. \end{aligned}$$

On peut alors écrire le schéma sous la forme suivante :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - r_{n,j} [\phi(U_j^n, U_{j+1}^n) - \phi(U_{j-1}^n, U_j^n)] + \Delta t_n Q_j^n$$

où on a posé $r_{n,j} = \frac{\Delta t_n}{\Delta x_j}$.

Q_j^n est l'approximation du terme source, définie ici par $\frac{1}{\Delta x_j \Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} Q(x, U) dx dt$.

La détermination du flux numérique est le fondement même de la méthode des volumes

finis.

Par exemple, pour la classe des Q -schémas, le flux numérique s'écrit :

$$\phi(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{2}(f(U_{j+1}^n) + f(U_j^n)) - \frac{1}{2}|Q(U_j^n, U_{j+1}^n)|(U_{j+1}^n - U_j^n).$$

Q est la matrice caractéristique du Q -schéma.

Dans le schéma de Roe, $Q(U_j^n, U_{j+1}^n) = A(\tilde{U})$ définit la matrice de Roe, où \tilde{U} représente l'état moyen à déterminer en fonction des deux états U_j^n et U_{j+1}^n .

2.2.2 Extension des schéma volumes finis en 2D

Le modèle mathématique à deux dimensions s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = Q(x, y, U), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

Le domaine d'étude D est discrétisé par une partition D_h composée de N_T triangles c_i ($i = 1, \dots, N_T$), telle que

$$D_h = \bigcup_{i=1}^{N_T} c_i.$$

h est la longueur maximale des côtés des triangles.

On intègre les équations (2.5) sur une cellule c_i du domaine en espace, de contour δc_i :

$$\int_{c_i} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{c_i} Q(x, y, U) dx dy,$$

et, par application du théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{c_i} \frac{\partial U}{\partial t} dx dy + \int_{\delta c_i} (F(U)n_x + G(U)n_y) d\sigma = \int_{c_i} Q(x, y, U) dx dy,$$

où $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$ est le vecteur normal unitaire extérieur à δc_i .

On pose alors $\mathcal{F}(U, \vec{n}) = F(U)n_x + G(U)n_y$ et on suppose, dans un premier temps, que U_i est constant par cellule (état moyen par cellule). On obtient ainsi

$$A_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j \in K(i)} \int_{\gamma_{ij}} \mathcal{F}(U, \vec{n}) d\sigma = \int_{c_i} Q(x, y, U) dx dy$$

où A_i est l'aire de la cellule c_i et $K(i)$ est l'ensemble des cellules qui ont une arête en commun avec la cellule c_i ; on note γ_{ij} l'arête commune aux cellules c_i et c_j .

Par analogie avec la méthodologie utilisée dans le cas unidimensionnel, on peut alors définir le flux numérique de la façon suivante

$$\int_{\gamma_{ij}} \mathcal{F}(U, \vec{n}) d\sigma = \phi(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij}) \text{mes}(\gamma_{ij})$$

où $mes(\gamma_{ij})$ est la longueur de l'arête γ_{ij} et \vec{n}_{ij} est le vecteur normal à cette arête, orienté de la cellule c_i vers la cellule c_j .

Enfin, on peut écrire le schéma sous la forme suivante

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t_n}{A_i} \sum_{j \in K(i)} \phi(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij}) mes(\gamma_{ij}) + \Delta t_n Q_i^n \quad (2.6)$$

avec $Q_i^n = \frac{1}{A_i} \int_{c_i} Q(x, y, U) dx dy$.

$\phi(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij})$ désigne le flux numérique bi-dimensionnel qui peut être vu comme une extension, dans ce cas, du flux numérique unidimensionnel obtenu en (2.4).

2.2.3 Rappel sur les flux numériques des schémas volume finis les plus performants

L'essor des méthodes de volumes finis de ces dernières années est dû, en grande partie, à l'intérêt grandissant pour la résolution numérique de lois de conservation.

Le premier schéma de ce type a été développé par S. K. Godunov [God59] et [God60]; il s'appuie sur la résolution exacte du problème de Riemann associé au modèle étudié, et est à l'origine de la plupart des méthodes dites décentrées.

Parmi les schémas volumes finis fréquemment rencontrés dans la littérature, on peut citer le schéma décentré, puis ceux de Lax-Freidrich, de Rusanov, de Roe, VFFC, VFRoe, que l'on rappelle brièvement ici. En particulier, on présente, pour chacun d'eux, l'écriture du flux numérique.

1. Le schéma décentré dont le flux numérique, dans le cas scalaire linéaire ($f(u) = au$), est donné par

$$\phi(U_i^n, U_{i+1}^n) = \begin{cases} f(U_i^n) & si \quad a \geq 0 \\ f(U_{i+1}^n) & si \quad a \leq 0. \end{cases}$$

2. Le schéma de Lax-Freidrich [LW60], dont le flux numérique unidimensionnel s'écrit

$$\phi(U_i^n, U_{i+1}^n) = \frac{1}{2} \left(f(U_i^n) + f(U_{i+1}^n) - \frac{1}{r_{n,j}} (U_{i+1}^n - U_i^n) \right). \quad (2.7)$$

Ce schéma est très diffusif et ne possède pas d'extension directe à la simulation numérique des problèmes en dimension deux d'espace avec un maillage non structuré, de part la difficulté à trouver un analogue cohérent au terme Δx_j .

3. Le schéma de Rusanov [Rus61] est une version modifiée du schéma du Lax-Friedrich. Le flux numérique de Rusanov, en dimension deux d'espace s'écrit sous la forme

$$\phi(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}(U_i^n, \vec{n}_{ij}) + \mathcal{F}(U_j^n, \vec{n}_{ij}) - S_{ij}^n (U_j^n - U_i^n) \right), \quad (2.8)$$

où U_i^n est la valeur de la variable conservative dans le volume c_i .

$$\mathcal{F}(U_i^n, \vec{n}_{ij}) = F(U_i^n)(\vec{n}_{ij})_x + G(U_i^n)(\vec{n}_{ij})_y$$

représente le flux physique dans la cellule c_i .
La vitesse de Rusanov locale s'écrit alors

$$S_{ij}^n = \max_{1 \leq k \leq p} (\max(|\lambda_{i,k}^n|, |\lambda_{j,k}^n|)).$$

Où $\lambda_{j,k}^n$ sont les des valeurs propres de la matrice jacobienne

$$\mathcal{A}(U_j^n, \vec{n}_{ij}) = (\vec{n}_{ij})_x \cdot F'(U_j^n) + (\vec{n}_{ij})_y \cdot G'(U_j^n).$$

Ce schéma, très robuste, permet la simulation numérique des problèmes aussi bien monophasiques que diphasiques en dimension deux d'espace, mais il a l'inconvénient d'être peu précis et trop diffusif, ce qui fait de lui un schéma coûteux en temps de calcul.

4. Le schéma de Roe [Roe81] est basé sur les solveurs approchés de Riemann et a été introduit principalement dans le cadre de l'étude de la dynamique des gaz. Ce schéma utilise l'auto-similarité de la solution des problèmes de Riemann locaux exacts ou approchés, définis à l'interface entre deux cellules.

Le flux numérique du schéma de Roe en dimension deux d'espace s'écrit :

$$\phi(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}(U_i^n, \vec{n}_{ij}) + \mathcal{F}(U_j^n, \vec{n}_{ij}) - \tilde{A}(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij}) |U_j^n - U_i^n| \right), \quad (2.9)$$

où $\tilde{A}(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij})$ représente la matrice de Roe qui dépend des états U_j^n et U_i^n . La manière de déterminer cette matrice n'est pas unique; mais Roe impose que $\tilde{A}(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij})$ vérifie les conditions suivantes :

- (a) $\tilde{A}(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij})(U_i^n - U_j^n) = \mathcal{F}(U_i^n, \vec{n}_{ij}) - \mathcal{F}(U_j^n, \vec{n}_{ij})$,
- (b) $\tilde{A}(U_i^n, U_j^n, \vec{n}_{ij})$ est diagonalisable, quels que soient U_j^n et U_i^n ,
- (c) $\tilde{A}(U_j^n, U_j^n, \vec{n}_{ij}) = \tilde{A}(U_j^n, \vec{n}_{ij})$.

Ce schéma est d'une grande précision, mais possède un défaut d'entropie sous sa forme originelle.

5. Le schéma équilibré [BV94] a été proposé pour traiter des systèmes non homogènes. Les auteurs montrent que ce schéma respecte une propriété de conservation dans le cas stationnaire ($u = 0$), appelée C -propriété. Ce schéma donne donc de bons résultats pour les équations de Saint-Venant avec terme de pente.
6. Le schéma VFFC, proposé par J.-M. Ghidaglia, A. Kumbaro et G. Le Coq [GKC96] est basé sur la méthode de flux caractéristique. Comme pour le schéma de Roe, les auteurs utilisent une base de vecteurs propres de la matrice jacobienne calculée sur un état moyen. Toutefois, ils ne font pas appel à un solveur de Riemann (exact ou approché) ce qui fait une différence notable.

Le flux numérique du schéma VFFC s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi(U_j^n, U_{j+1}^n) &= \sum_{\lambda_k(\nu_j^n) > 0} l_k(\nu_j^n) \cdot F(U_j^n) r_k(\nu_j^n) \\ &+ \sum_{\lambda_k(\nu_j^n) = 0} l_k(\nu_j^n) \cdot \left[\frac{|A_j| F(U_j^n) + |A_{j+1}| F(U_{j+1}^n)}{(|A_j| + |A_{j+1}|)} \right] r_k(\nu_j^n) \\ &+ \sum_{\lambda_k(\nu_j^n) < 0} l_k(\nu_j^n) \cdot F(U_{j+1}^n) r_k(\nu_j^n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $l_k(\nu_j^n) \forall k \in \mathbb{N}$ désignent les vecteurs propres à gauche, de la matrice jacobienne.

L'état moyen ν_j^n est défini par $\nu_j^n = \frac{(|A_j| U_j^n + |A_{j+1}| U_{j+1}^n)}{(|A_j| + |A_{j+1}|)}$.

7. Le schéma VFRoe [MFG99], [Gal96] :

Le flux numérique du schéma VFRoe, en dimension un, est donné par

$$\phi(U_i^n, U_{i+1}^n) = f(U^*(0; U_i^n, U_{i+1}^n))$$

où $U^*(0; U_i^n, U_{i+1}^n)$ est l'approximation de la solution du problème de Riemann linéarisé, donnée par

$$\begin{aligned} U^*(0; U_i^n, U_{i+1}^n) &= U_i^n + \sum_{\frac{x}{t} > 0} (\bar{l}_k \cdot (U_{i+1}^n - U_i^n)) \bar{r}_k \\ &= U_{i+1}^n - \sum_{\frac{x}{t} < 0} (\bar{l}_k \cdot (U_{i+1}^n - U_i^n)) \bar{r}_k \end{aligned}$$

\bar{l}_k étant le k-ième vecteur propre à gauche et \bar{r}_k , le k-ième vecteur propre à droite de la matrice jacobienne associée au problème, calculée en l'état moyen $\frac{U_{i+1}^n + U_i^n}{2}$.

Tous ces schémas font appel au calcul des champs propres de la matrice jacobienne, ce qui les rend coûteux. Ils restent néanmoins indispensables dans la résolution des cas complexes. Pour des cas plus simples, on aimerait avoir des schémas moins coûteux.

Une tentative dans ce sens a été proposée par Liou dans [LJS93] et [Lio96]; ce schéma nommé ASUM (Advection Upwind Splitting Method) permet la résolution numérique de systèmes hyperboliques. L'idée principale de ce schéma est basée sur la décomposition du flux numérique en deux parties : un flux convectif et un flux de pression. Par conséquent, l'auteur évite ainsi le recours à un solveur de Riemann linéarisé. Cependant, ce schéma utilise l'évaluation des quantités aux interfaces en utilisant des développements polynomiaux des vecteurs propres, ce qui est également très coûteux en temps de calcul.

2.2.4 Approximation du terme source

Le traitement du terme source a une grande influence sur la précision du schéma, en particulier quand ce terme est non borné. Ceci se traduit par une difficulté numérique majeure

[Lev02]. Par exemple, la discrétisation des termes sources par une méthode explicite conduit à des instabilités numériques [Amb95].

Pour traiter la spécificité des problèmes non homogènes, certains auteurs ont proposé de nouveaux schémas ou des extensions de schémas performants, qui ont donné de bons résultats.

Plusieurs méthodes ont été proposées ; on en expose ici quelques unes :

1. Travaux de A. Bermudez et M.E. Vazquez

Partant d'un schéma décentré de type Q -schéma pour traiter la partie homogène d'un problème avec terme source, A. Bermudez et M. E. Vazquez [BV94] proposent de décentrer également ce terme source en introduisant une fonction \mathcal{G} définie de la façon suivante :

$$Q_j^n = \mathcal{G}(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \quad (2.11)$$

$$= \mathcal{G}^L(x_{j-1}, x_j, U_{j-1}^n, U_j^n) + \mathcal{G}^R(x_j, x_{j+1}, U_j^n, U_{j+1}^n), \quad (2.12)$$

où \mathcal{G}^L et \mathcal{G}^R sont des fonctions sources définies à gauche et à droite (respectivement). On opère une projection du terme source sur les vecteurs propres de la matrice Q ce qui permet d'écrire les deux fonctions du terme source sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^L(x_{j-1}, x_j, U_{j-1}^n, U_j^n) &= \frac{1}{2} [I + |Q(U_{j-1}^n, U_j^n)| Q(U_{j-1}^n, U_j^n)^{-1}] \tilde{\mathcal{G}}(x_{j-1}, x_j, U_{j-1}^n, U_j^n) \\ \mathcal{G}^R(x_j, x_{j+1}, U_j^n, U_{j+1}^n) &= \frac{1}{2} [I - |Q(U_j^n, U_{j+1}^n)| Q(U_j^n, U_{j+1}^n)^{-1}] \tilde{\mathcal{G}}(x_j, x_{j+1}, U_j^n, U_{j+1}^n). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cette méthode, qui permet de retrouver la solution exacte (avec un bon choix de $\tilde{\mathcal{G}}$) dans le cas stationnaire avec vitesse nulle, donne des résultats très précis pour les équations de Saint-Venant avec topographie. Cependant, son extension à des problèmes non homogènes généraux, tels que les écoulement diphasiques, ne semble pas immédiate.

2. Méthode à pas fractionnaires

Il s'agit d'une technique classique de fractionnement d'opérateur proposée par Yanenko [Yan68]. Pour cela, on décompose le système (2.1) en deux systèmes :

Dans un premier temps, on résout l'EDO

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = Q(\tilde{U}) \quad (2.14)$$

puis ensuite, l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \\ U(0, t) = \tilde{U}(t). \end{cases} \quad (2.15)$$

Pour le système d'équations différentielles (2.14) on pourra par exemple, utiliser une méthode implicite linéaire (on peut consulter, par exemple [Mon97]). Ensuite, on pourra résoudre le système homogène (2.15) en utilisant une méthode de volumes finis classique.

Cette démarche s'est révélée en particulier d'une grande efficacité pour traiter des problèmes d'écoulement d'eau sur fond sec.

Bibliographie

- [Amb95] D. Ambroisi, *Approximation of shallow water equations by Riemann solvers*, International Journal of Numerical Methods in Fluids **20** (1995), 157–168.
- [BV94] A. Bermudez and M.E Vazquez, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Comput. & Fluids **23** (1994), no. 8, 1049–1071.
- [Gal96] T. Gallouët, *Rough schemes for complex hyperbolic systemes*, FVCA1, HPS, F. Benkhaldoun, R. Vilsmeier, Proceedings of the first International Symposium on Finite Volumes for Complex Application, 1996, pp. 5–14.
- [GKC96] J.M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode “volumes finis” à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [God59] S.K. Godunov, *A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics*, Mat. Sb. (N.S.) **47 (89)** (1959), 271–306.
- [God60] ———, *A difference method for the calculation of shock waves*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **16** (1960), 389–390.
- [Lev02] Randall J. Leveque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Lio96] M-S. Liou, *A sequel to AUSM : AUSM⁺*, J. Comput. Phys. **129** (1996), no. 2, 364–382.
- [LJS93] M.-M. Liou and J. Christopher Jr. Steffen, *A new flux splitting scheme*, J. Comput. Phys. **107** (1993), no. 1, 23–39.
- [LW60] P. Lax and B. Wendroff, *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 217–237.
- [MFG99] J.-M. Masella, I. Faille, and T. Gallouët, *On an approximate Godunov scheme*, Int. J. Comput. Fluid Dyn. **12** (1999), no. 2, 133–149.
- [Mon97] L.A. Monthé, *Etude des équations aux dérivées partielles hyperboliques. application aux équations de Saint-Venant*, Ph.D. thesis, Rouen, 02Juillet 1997.
- [Roe81] P.L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, et difference schemes*, J. Comput. Phys. **43** (1981), no. 2, 357–372.
- [Rus61] V.V. Rusanov, *Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles.*, J. Comp. Math. Phys. USSR **1** (1961), 267–279.
- [Yan68] N.N. Yanenko, *Méthode à pas fractionnaires. résolution de problèmes polydimensionnels de physique mathématique*, no. Traduit du Russe par P. A. Nepomiaschy, Librairie Armand Colin, 1968.

Chapitre 3

Un schéma de flux à deux étapes : le schéma SRNHR

3.1 Présentation du schéma SRNHR

F. Benkhaldoun, dans ([Ben02]) a proposé le schéma SRNH (Solveur de Riemann Non Homogène), schéma qui a donné de bons résultats dans le cas monodimensionnel. Pour écrire ce schéma en dimensions supérieures à un, il se pose le problème de transcription de la vitesse numérique $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ naturelle en dimension un, en une quantité ayant un sens en deux dimensions d'espace. Il a donc été choisi de travailler avec la vitesse "physique" par analogie au schéma proposé par Rusanov. On a ainsi construit un nouveau schéma nommé SRNHR (Solveur de Riemann Non Homogène Rusanov).

Dans cette section, nous présentons d'abord ce schéma puis nous l'analyserons avant de le tester durant le travail présenté dans le reste de ce document.

Considérons un système de lois de bilan dans \mathbb{R}^p , issue de la mécanique des fluides, et qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = Q(x, W) \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, T[\\ W(x, 0) = W_0(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous faisons l'hypothèse fondamentale que le problème de Riemann correspondant, défini par :

$$W_0(x) = W_L \text{ si } x < 0, \text{ et } W_0(x) = W_R \text{ si } x > 0,$$

admet une solution autosimilaire notée $W(x, t) = H\left(\frac{x}{t}\right)$.

Plus précisément :

Si on note a_L et a_R , des pentes de courbes de discontinuité ou de détente, il existe un opérateur noté Rs tel que

$$W(x, t) = H\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} W_L, & \text{si } \frac{x}{t} < a_L \\ \overline{H}\left(\frac{x}{t}\right) = Rs\left(\frac{x}{t}, W_L, W_R\right), & \text{si } a_L < \frac{x}{t} < a_R \\ W_R, & \text{si } \frac{x}{t} > a_R. \end{cases} \quad (3.2)$$

Rappelons que Alcrudo et Benkhaldoun ont montré dans [AB01] que les équations de Saint-Venant avec un fond en forme de marche, donnaient lieu à une solution autosimilaire du problème de Riemann, quand la discontinuité initiale de la solution était située à l'endroit de la marche.

Par ailleurs, nous exprimons que nous considérons une solution au sens des distributions du problème (3.1), en utilisant la proposition *ii*) du théorème (2.1.1) :

$$\int_{\partial R} [W.n_t + f(W).n_x] d\sigma = \int_R Q(x, W) dx dt. \quad (3.3)$$

On se propose de construire un schéma numérique basé uniquement sur les deux propriétés (3.2) et (3.3).

Comme précédemment, définissons pour un maillage uniforme :

$r^n = \frac{\Delta t^n}{\Delta x}$, avec $\Delta t^n = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta x = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$, les pas de temps et d'espace respectivement.

Nous noterons x_j le centre de la cellule $]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$.

S'inspirant de la démarche de Godunov, et en utilisant une première fois les propriétés (3.2) et (3.3), sur le domaine $R =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\times [t_n, t_{n+1}[$, on écrit :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - r^n [F(Rs(0, W_j^n, W_{j+1}^n)) - F(Rs(0, W_{j-1}^n, W_j^n))] + \Delta t^n Q_j^n,$$

où Q_j^n est une approximation de $\frac{1}{\Delta x \Delta t^n} \int_R Q(x, W) dx dt$.

Pour l'évaluation de $F(Rs(0, W_j^n, W_{j+1}^n))$, l'idée ici est d'éviter de calculer la solution exacte Rs , ou même d'introduire un problème de Riemann linéarisé. Nous cherchons directement une valeur approchée de la solution exacte, en exploitant les propriétés (3.2) et (3.3).

Ainsi, on écrit par exemple sur le bord $x_{j+\frac{1}{2}}$:

$$W_{j+\frac{1}{2}}^n = \text{approximation de } Rs(0, W_j^n, W_{j+1}^n).$$

Pour obtenir cette approximation, on utilise de nouveau la propriété (3.3) sur un ouvert $\pi_{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n} =]X^-, X^+[\times]t_n, t_n + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n[$ tel que $x_{j+\frac{1}{2}} \in]X^-, X^+[$.

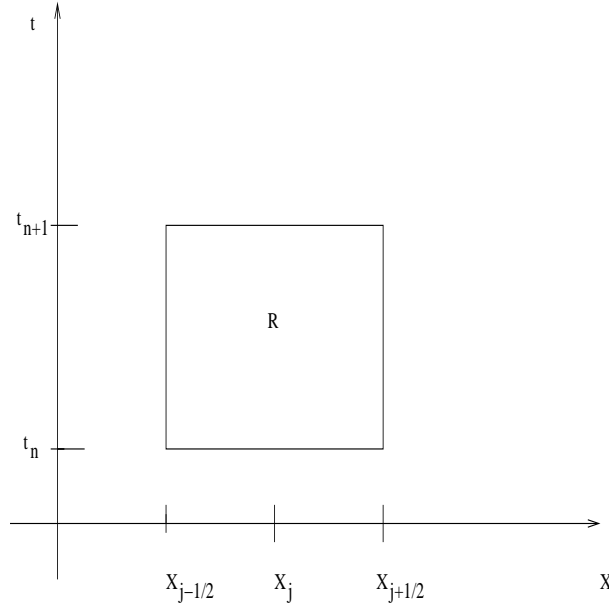


FIG. 3.1 –

En supposant que X^- , X^+ et $\theta_{j+\frac{1}{2}}^n$ sont choisis de telle façon que $\forall t \in]t_n, t_n + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n[$:

$$Rs \left(\frac{X^- - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t_n}, W_j^n, W_{j+1}^n \right) = W_j^n \text{ et } Rs \left(\frac{X^+ - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t_n}, W_j^n, W_{j+1}^n \right) = W_{j+1}^n,$$

et en introduisant les distances : $dX^- = |X^- - x_{j+\frac{1}{2}}|$ et $dX^+ = |X^+ - x_{j+\frac{1}{2}}|$,
on a

$$\int_{X^-}^{X^+} W \left(x, t_n + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n \right) dx = dX^- W_j^n + dX^+ W_{j+1}^n - \theta_{j+\frac{1}{2}}^n [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] + \int_{\pi_{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}^{j+\frac{1}{2}}} Q(x, W) dx dt.$$

On définit :

$$W_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{dX^- + dX^+} \int_{X^-}^{X^+} W \left(x, t_n + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n \right) dx.$$

Avec le choix : $X^- = x_j$ et $X^+ = x_{j+1}$, on obtient une première expression générale, fonction de $\theta_{j+\frac{1}{2}}^n$, de la solution approchée $W_{j+\frac{1}{2}}^n$ issue de cette première étape, que nous appellerons étape de prédiction :

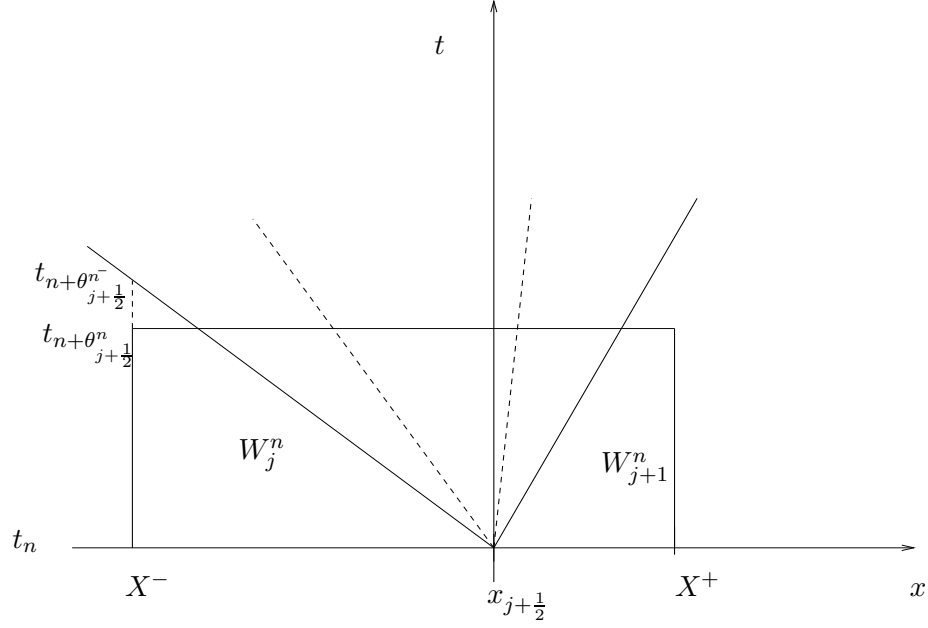


FIG. 3.2 –

$$W_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_j^n + W_{j+1}^n) - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n, \quad (3.4)$$

où

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n = \hat{Q}(x_j, x_{j+1}, W_j^n, W_{j+1}^n)$$

est une approximation, à définir de manière judicieuse en fonction du terme source, de

$$\frac{1}{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta x} \int_{\pi_{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}} Q(x, W) dx dt.$$

Un premier choix du paramètre $\theta_{j+\frac{1}{2}}^n$ a été de le prendre comme une fraction du pas de temps Δt^n , en écrivant

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \Delta t^n. \quad (3.5)$$

On arrive ainsi à la première forme du schéma SRNH (Solveur de Riemann Non Homogène) :

$$\begin{cases} W_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_j^n + W_{j+1}^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} r^n [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \Delta t^n \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n \\ W_j^{n+1} = W_j^n - r^n \left[F\left(W_{j+\frac{1}{2}}^n\right) - F\left(W_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \right] + \Delta t^n Q_j^n. \end{cases} \quad (3.6)$$

Cette forme du schéma SRNH a été utilisé avec succès pour des problèmes non homogènes 1D dans le cas de maillages uniformes (voir [Ben02]).

3.1.1 Remarque concernant le paramètre de contrôle $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$:

Ce paramètre a pour objectif de contrôler la diffusion numérique du schéma comme le montre l'analyse menée dans le cas scalaire dans le chapitre suivant. Par exemple dans le cas d'une équation scalaire linéaire sur maillage uniforme le choix de $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1$ redonne exactement le schéma de Lax-Wendroff.

S. Sahmim dans [Sah05] a également travaillé sur une autre formulation de schéma SRNH, où intervient le signe de la matrice jacobienne du système de lois de bilan considéré : le schéma SRNHS. Ce schéma, équivalent à VFRoe dans le cas homogène, est d'ordre un et nécessite une correction entropique dans certains cas.

3.1.2 Introduction du schéma SRNHR :

Dans le but de l'extension du schéma SRNH au cas bidimensionnel, où il est difficile de définir un équivalent de la distance Δx , il est apparu nécessaire de proposer une variante de (SRNH) ne faisant pas apparaître cette distance dans la phase prédicteur du schéma.

Cela consiste à écrire $\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n \bar{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n$ où $\bar{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n$ est défini par la vitesse de Rusanov (voir figure 3.2) comme suit :

$$\bar{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta x}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n}, \quad (3.7)$$

$$\text{où } S_{j+\frac{1}{2}}^n = \max_{k=1,\dots,p} (|\lambda_{j,k}^n|, |\lambda_{j+1,k}^n|).$$

Cela amène à la nouvelle expression de la phase prédicteur du schéma :

$$W_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_j^n + W_{j+1}^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{\Delta x}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n. \quad (3.8)$$

Remarque : Pour les problèmes traités dans ce travail, le terme non homogène Q contient généralement un terme de dérivée spatiale d'ordre 1. Ainsi, pour le système de Saint-Venant

(1.7), la première composante du terme source est nulle et la seconde s'écrit $Q = -gH \frac{dz}{dx}$ dont une approximation naturelle pour la phase prédicteur s'écrit

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n = -g \frac{H_j^n + H_{j+1}^n}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x}.$$

La distance Δx disparaît donc du terme source de l'étape prédicteur, et permet ainsi l'extension du schéma au cas bidimensionnel.

La forme définitive du schéma SRNHR dans le cas général s'écrit donc :

$$\begin{cases} W_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_j^n + W_{j+1}^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{\Delta x}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n \\ W_j^{n+1} = W_j^n - r^n [F(W_{j+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{j-\frac{1}{2}}^n)] + \Delta t^n Q_j^n. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.2 Schéma SRNHR, dans le cas bidimensionnel

Pour l'extension $2D$, on va écrire le schéma en considérant le système de Saint-Venant, afin de faire apparaître les "difficultés" rencontrées ; cette transition est réalisable sur ce type de problème, car le terme source comporte des dérivées spatiales.

Dans la phase intermédiaire, nous sommes amenés à calculer les gradients des variables, à l'interface de chaque cellule.

A partir de l'extension des schémas aux volumes finis en $2D$, le schéma SRNHR s'écrit alors

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in K(i)} \phi(W_i^n, W_j^n, \vec{n}_{ij}) \text{mes}(\gamma_{ij}) + \Delta t^n Q_i^n \quad (3.10)$$

où Q_i^n est une approximation judicieuse du terme non homogène à l'étape correcteur, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

$\phi(W_i^n, W_j^n, \vec{n}_{ij})$ représente la fonction du flux numérique bi-dimensionnel.

Le but ici est d'écrire le flux de façon analogue au cas $1D$. Plus précisément nous écrivons $\phi(W_i^n, W_j^n, \vec{n}_{ij}) = \mathcal{F}(W_{ij}^n, \vec{n}_{ij})$ où W_{ij}^n est déterminé dans une étape prédicteur du schéma.

3.2.1 Détermination de W_{ij}^n :

Cela est fait par le biais de la projection du système sur la normale à la frontière γ_{ij} .

Par exemple dans le cas du système de Saint-Venant, présenté au chapitre 1 (1.7), on intègre l'équation de la masse sur une cellule c

$$\int_c \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{\partial c} h(un_x + vn_y) d\sigma = 0. \quad (3.11)$$

On utilise la projection du système sur la normale à l'interface d'une maille, évoquée par R. Abgrall et ses coauteurs dans [ANS03]. On note $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$, $U = \vec{V} \cdot \vec{\eta} = un_x + vn_y$ et $V = \vec{V} \cdot \vec{\eta}^\perp = -un_y + vn_x$, où U est la projection de \vec{V} sur la normale $\vec{\eta}$ et V , la projection de \vec{V} sur la tangentielle $\vec{\eta}^\perp$ (voir la figure 3.3).

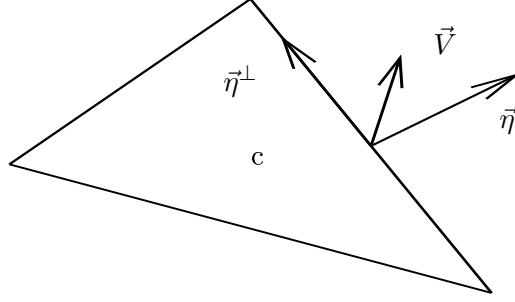


FIG. 3.3 –

On peut écrire l'équation (3.11) sous la forme suivante :

$$\int_c \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{\partial c} hU d\sigma = 0. \quad (3.12)$$

De même, si on intègre l'équation de la quantité de mouvement, suivant la direction x :

$$\int_c \frac{\partial hu}{\partial t} + \int_{\partial c} huU d\sigma + \int_{\partial c} Pn_x d\sigma + gh(c) \int_{\partial c} zn_x d\sigma = 0, \quad (3.13)$$

où $P = \frac{1}{2}gh^2$, puis, suivant la direction y , on obtient

$$\int_c \frac{\partial hv}{\partial t} + \int_{\partial c} hvU d\sigma + \int_{\partial c} Pn_y d\sigma + gh(c) \int_{\partial c} zn_y d\sigma = 0. \quad (3.14)$$

Cela amène à considérer la solution approchée sur une frontière γ , comme solution du problème de Riemann local, exprimé sur cette frontière, par le système projeté sur la normale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial huU}{\partial \eta} + n_x \frac{\partial P}{\partial \eta} + gh n_x \frac{dz}{d\eta} = 0 \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hvU}{\partial \eta} + n_y \frac{\partial P}{\partial \eta} + gh n_y \frac{dz}{d\eta} = 0 \\ W(\eta, 0) = \begin{cases} W_L & si \quad \eta < 0 \\ W_R & si \quad \eta > 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Les combinaisons linéaires $n_x \times (3.15)_b + n_y \times (3.15)_c$ et $-n_y \times (3.15)_b + n_x \times (3.15)_c$ permettent d'obtenir le système où les variables sont maintenant h , U et V

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial(hU^2 + P)}{\partial \eta} + gh \frac{dz}{d\eta} = 0 \\ \frac{\partial hV}{\partial t} + \frac{\partial hUV}{\partial \eta} = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Cela permet alors d'écrire l'état W_{ij}^n (à la première étape) du schéma SRNHR, où on a noté $M_{ij}(X) = \frac{1}{2}(X_i + X_j)$ et $\Delta_{ij}(X) = X_j - X_i$:

$$\begin{cases} (h)_{ij} = M_{ij}(h) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} \Delta_{ij}(hU) \\ (hU)_{ij} = M_{ij}(hU) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} \Delta_{ij}(hU^2 + P) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} g \tilde{h}_{ij} \Delta_{ij}(z) \\ (hV)_{ij} = M_{ij}(hV) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} \Delta_{ij}(hUV), \end{cases} \quad (3.17)$$

où \tilde{h}_{ij} est une interpolation linéaire entre h_i et h_j donnée par $\tilde{h}_{ij} = \frac{A_i h_i + A_j h_j}{A_i + A_j}$, A_i étant l'aire de la cellule c_i .

On en déduit alors

$$(hu)_{ij} = n_x(hU)_{ij} - n_y(hV)_{ij}$$

et

$$(hv)_{ij} = n_y(hU)_{ij} + n_x(hV)_{ij}.$$

Notons que la technique exposée ici pour le système de Saint-Venant s'applique également au modèle diphasique.

3.2.2 Approximation du terme non homogène dans la partie correcteur

Une des difficultés rencontrées concerne le traitement des termes non conservatifs $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, dans l'étape correcteur. Différentes méthodes existent pour réaliser le calcul approché des gradients souhaités. Dans la section suivante, on expose en particulier, comment on peut réaliser l'évaluation de ces gradients par la méthode des moindres carrés. On verra, dans les résultats numériques obtenus, que le choix de la méthode de ces calculs

de gradients, ont une grande influence sur la qualité des résultats obtenus. Cette constatation nous a amenés à réaliser l'évaluation de la consistance et de l'ordre des schémas utilisés. Dans un souci de simplification, cette étude est réalisée ici dans un cas monodimensionnel, mais sur un maillage non uniforme. Cette étude sera présentée au chapitre (5) après que l'analyse numérique du schéma ait été réalisée, au chapitre (4).

3.3 Extension à l'ordre 2 en espace (MUSCL)

On définit un nouvel espace d'approximation, où l'on approche l'état physique W par une distribution linéaire par morceaux, qui est l'espace des fonctions affines par cellule. On applique une démarche qui a été utilisée par I. Elmahi [Elm99] et qui se décompose en deux étapes : une étape de reconstruction des états gauche et droite, et une étape de limitation des gradients afin d'éviter les oscillations.

Etape 1 (reconstruction linéaire des états) :

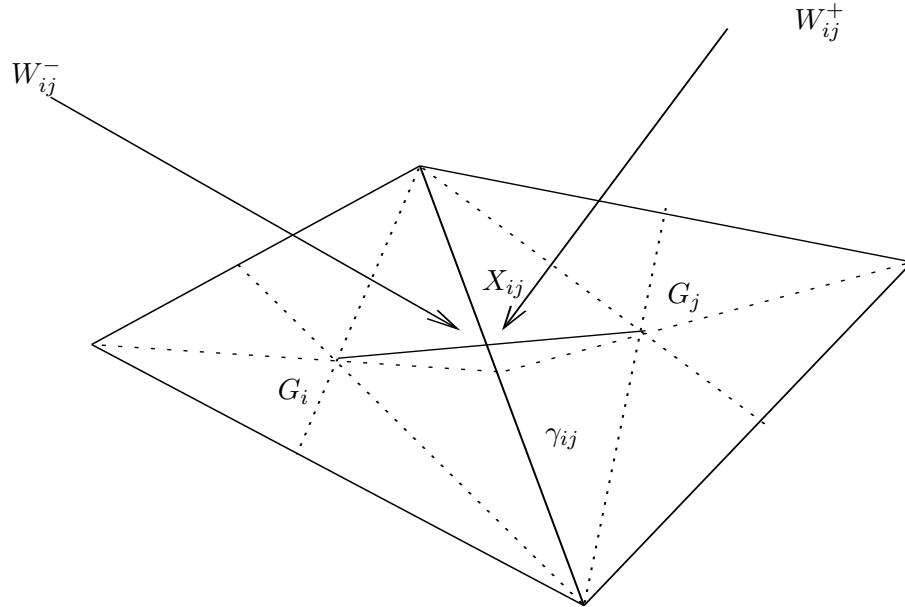


FIG. 3.4 –

Au point X_{ij} de l'arête γ_{ij} séparant deux volumes de contrôle c_i et c_j , on définit deux valeurs de W , une à gauche W_{ij}^- dans la cellule c_i , et une à droite W_{ij}^+ dans la cellule c_j par :

$$\begin{cases} W_{ij}^- = W_i + \frac{1}{2} \vec{\nabla} W_i G_i \vec{G}_j \\ W_{ij}^+ = W_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla} W_j G_i \vec{G}_j. \end{cases} \quad (3.18)$$

Où G_i et G_j sont respectivement les barycentres des triangles c_i et c_j , $\vec{\nabla}W_i$ et $\vec{\nabla}W_j$ représentent les gradients sur c_i et c_j .

La fonction de flux reste la même, seuls ses arguments changent, et on a :

$$\int_{\gamma_{ij}} \mathcal{F}(W, \vec{n}) d\sigma = \phi(W_{ij}^-, W_{ij}^+, \vec{n}_{ij}) \text{mes}(\gamma_{ij}).$$

Le problème crucial dans cette étape est l'évaluation des gradients de la solution sur chaque volume de contrôle. Ceci peut être effectué de différentes manières, en particulier suivant le type de cellules utilisées. On présente une technique de calcul de gradients dans le cas où on utilise des maillages triangulaires ou quadrangulaires.

Par exemple, on peut utiliser la méthode des moindres carrés :

Pour un triangle c_i , considérons l'expression

$$\Delta(W_i, W_j) = W_i + (x_j - x_i) \frac{\partial W_i}{\partial x} + (y_j - y_i) \frac{\partial W_i}{\partial y} - W_j,$$

où (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont respectivement les coordonnées des centres de gravité de c_i et c_j . Le terme $\Delta(W_i, W_j)$ représente ici la différence entre la valeur effective de W au centre de la cellule c_j et la valeur obtenue au centre de c_j par développement limité de la fonction W définie au centre de c_i . Le gradient sur la cellule c_i est évalué en minimisant la fonction quadratique :

$$\Psi_i \left(\frac{\partial W_i}{\partial x}, \frac{\partial W_i}{\partial y} \right) = \sum_{j \in V(i)} |\Delta(W_i, W_j)|^2,$$

où $V(i)$ est l'ensemble des triangles ayant un sommet commun avec c_i , $\frac{\partial W_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial W_i}{\partial y}$ sont alors solutions du système linéaire de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\frac{\partial \Psi_i(X, Y)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_i(X, Y)}{\partial Y} = 0.$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial x} &= \frac{J_x I_{yy} - J_y I_{xy}}{D} \\ \frac{\partial W_i}{\partial y} &= \frac{J_y I_{xx} - J_x I_{yx}}{D}, \end{aligned}$$

avec les notations

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{j \in V(i)} (x_j - x_i)^2, \quad I_{yy} = \sum_{j \in V(i)} (y_j - y_i)^2, \\ I_{xy} &= I_{yx} = \sum_{j \in V(i)} (x_j - x_i)(y_j - y_i), \quad D = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2, \\ J_x &= \sum_{j \in V(i)} (x_j - x_i)(W_j - W_i), \quad J_y = \sum_{j \in V(i)} (y_j - y_i)(W_j - W_i). \end{aligned}$$

Étape 2 (limitation des pentes) :

L'approximation obtenue avec les états évalués dans l'étape 1, peut être dispersive et produire de nouveaux extrema entre les cellules. Pour atténuer ces oscillations, on utilise un schéma de type *TVD* obtenu en utilisant des valeurs limitées $\frac{\partial^{lim}W_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial^{lim}W_i}{\partial y}$ au lieu de $\frac{\partial W_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial W_i}{\partial y}$, dans (3.18).

Par exemple, on présente ici un type de limiteurs qui peut être utilisé dans le cas bidimensionnel pour des maillages non structurés.

Limiteur MinMod généralisé :

Sur chaque volume de contrôle c_i , les gradients sont limités de la manière suivante :

$$\frac{\partial^{lim}W_i}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\min_{j \in V(i)} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x} \right) + \max_{j \in V(i)} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x} \right) \right] \min_{j \in V(i)} \left| \frac{\partial W_j}{\partial x} \right|.$$

De même pour $\frac{\partial^{lim}W_i}{\partial y}$. Cette limitation peut être étendue sur l'ensemble $V(i)$ des triangles ayant un sommet commun avec c_i .

D'autres limiteurs sont souvent utilisés ; en particulier, on présentera des résultats numériques obtenus avec le limiteur Superbee ou le limiteur de Van Leer.

Bibliographie

- [AB01] F. Alcrudo and F. Benkhaldoun, *Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step*, Comput. & Fluids **30** (2001), no. 6, 643–671.
- [ANS03] R. Abgrall, B. Nkonga, and R. Saurel, *Efficient numerical approximation of compressible multi-material flow for unstructured meshes*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 4, 571–605.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for non-homogeneous systems*, Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002), Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille, 2002, pp. 255–262 (electronic).
- [Elm99] I. Elmahi, *Schémas volumes finis pour la simulation numérique de problèmes à fronts raides en maillages non structurés adaptatifs*, Ph.D. thesis, Rouen, 1999.
- [Sah05] S. Sahmim, *Un schéma aux volumes finis avec matrice signe pour les systèmes non homogènes*, Ph.D. thesis, Paris 13, 2005.

Chapitre 4

Analyse numérique en dimension un

On s'intéresse, dans ce chapitre, à l'analyse des schémas utilisés dans ce travail. Après avoir rappelé quelques propriétés fondamentales que doivent respecter les schémas numériques, on regardera sous quelles conditions les schémas utilisés respectent bien les dites propriétés.

Le schéma présenté au chapitre (3) possède la particularité de comporter deux étapes. En particulier, la première étape, qui nécessite l'évaluation d'un état intermédiaire où intervient un paramètre ad'hoc, est basée sur une approche similaire à celle utilisée dans la construction du schéma de Rusanov. Il convient donc de mener une analyse de stabilité du schéma SRNHR et de vérifier qu'il satisfait bien à la propriété TVD. Mais auparavant, on revient sur l'analyse du schéma de Rusanov, cette analyse permettant d'utiliser les liens qui existent entre ces deux schémas et ainsi d'en avoir une meilleure compréhension. Enfin, le schéma SRNHR possède une complexité supplémentaire : il s'écrit en fonction d'une vitesse locale, ce qui nous amène à réaliser une analyse locale.

4.1 Schéma Volumes Finis pour un problème scalaire homogène

Dans le cas homogène, on ne prend pas en compte le terme source ($Q(x, u) = 0$). Le système hyperbolique présenté précédemment (2.1) prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 & 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.1)$$

On suppose, dans cette partie, que f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^2 et que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. On introduit également l'espace $X = \Omega \times [0, T[$.

On rappelle que le système (4.1) peut admettre plusieurs solutions au sens des distributions (solutions faibles) ; mais une seule solution \hat{u} possède un sens physique, c'est à dire satisfait à la condition d'entropie. Kruzkov [Kru70] a démontré un théorème d'existence et

d'unicité de la solution faible entropique \hat{u} sous certaines conditions. Ici, nous admettrons ce résultat sous des hypothèses de régularité pour u_0 , (voir [GR91]) ; nous supposons de plus que $u_0 \in BV(\Omega)$.

Pour déterminer un schéma numérique permettant d'obtenir des solutions approchées de (4.1) les meilleures possibles, il faut que ce schéma possède certaines propriétés que nous allons rappeler. On explique en particulier, ce que représentent les notions de consistance, de stabilité, de monotonie et de variation total diminuante (TVD). On attend d'un schéma numérique qu'il converge vers l'unique solution entropique du problème posé, avec la meilleure précision possible.

On considère un pas de temps uniforme $\Delta t = t_{n+1} - t_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une discrétisation uniforme en espace, de pas d'espace $h = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}, \forall j \in \mathbb{Z}$. Nous introduisons également les intervalles $I_j =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ et $T_n = [t_n, t_{n+1}[$.

On notera u_h la solution approchée au sens volumes finis ainsi définie : $u_h(x, t) = u^n(x)$ si $t \in T_n$, et $u^n(x) = u_j^n$ si $x \in I_j$.

De plus, nous introduisons les hypothèses, notations et définitions suivantes :

- H1) les fonctions f' et f'' gardent un signe constant non nul chacune.
- H2) u_0 est de signe constant non nul.
Pour fixer les idées, on supposera $0 < u_m \leq u_0(x) \leq u_M$.
- D1) si $u = v$, $a(u, v) = f'(u)$, si $u \neq v$, $a(u, v) = a(v, u) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$.
- D2) $a_{j+\frac{1}{2}}^n = a(u_j^n, u_{j+1}^n)$.
- D3) $\alpha^n = \sup_{(j \in \mathbb{Z})} \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{s_{j+\frac{1}{2}}^n}$,
où $S_{j+\frac{1}{2}}^n = \max(|f'(u_j^n)|, |f'(u_{j+1}^n)|)$ et $s_{j+\frac{1}{2}}^n = \min(|f'(u_j^n)|, |f'(u_{j+1}^n)|)$.
- D4) $fp_m = \min(|f'(u_m)|, |f'(u_M)|)$, $fp_M = \max(|f'(u_m)|, |f'(u_M)|)$, $\alpha_{\max} = \frac{fp_M}{fp_m}$.
- D5) $G = \{w \in \mathbb{R} / |w| \leq \alpha_{\max} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$.
- D6) $M = \sup |f'(w)|, w \in G$.
- D7) $\Delta X_{j+\frac{1}{2}}^n = X_{j+1}^n - X_j^n$.

4.1.1 Forme générale d'un schéma aux volumes finis

De façon générale, on peut écrire un schéma aux Volumes Finis sous la forme :

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-q}^n, \dots, u_{j+q}^n) \quad (4.2)$$

où $q \in \mathbb{Z}$. Le schéma (4.2) est dit à $2q + 1$ points.

4.1.2 Quelques définitions

1. Convergence

On considère un espace fonctionnel de Banach E , muni de la norme $\|\cdot\|_E$.

Définition 4.1.1 On dira qu'un schéma est convergent d'ordre k dans l'espace E si et seulement si $\|\hat{u} - u_h\|_E \leq C_1 h^k$ ou C_1 est une constante indépendante de h et de Δt .

2. Conservativité

Définition 4.1.2 Un schéma numérique peut se mettre sous forme conservative, si il existe $q \in \mathbb{Z}$ et une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r \left(\phi(u_{j-q+1}^n, \dots, u_{j+q}^n) - \phi(u_{j-q}^n, \dots, u_{j+q-1}^n) \right), \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et } n \geq 0,$$

où $u_j^n = u(x_j, t^n)$, $\phi(u_{j-q+1}^n, \dots, u_{j+q}^n)$ est le flux numérique et $r = \frac{\Delta t}{h}$.

3. Consistance

Définition 4.1.3 Le schéma numérique est consistant au sens des Volumes Finis (VF-consistant), avec l'équation aux dérivées partielles (4.1), si le flux numérique vérifie la condition suivante :

$$\phi(u_{j-q+1}, u_{j-q+2}, \dots, u_{j+q}) = f(u) \text{ quand } u_i = u, \quad \forall i \text{ tel que } j-q+1 \leq i \leq j+q.$$

Définition 4.1.4 Un schéma est dit à flux continu lipschitzien, s'il existe une constante C telle que :

$$|\phi(u_{j-q+1}, u_{j-q+2}, \dots, u_{j+q}) - f(u)| < C \max |u_{j+k} - u| \quad \text{où } -q+1 \leq k \leq q.$$

Définition 4.1.5 Un schéma numérique est consistant d'ordre p au sens des Différences Finies (DF-consistant), si l'erreur de troncature du schéma vérifie la condition suivante :

$$\|ET\|_E \leq C_0 h^p,$$

avec

$$ET(x, t) = \frac{1}{\Delta t} [\hat{u}(x, t + \Delta t) - H(\hat{u}(x - qh, t), \dots, \hat{u}(x + qh, t))],$$

et C_0 est une constante indépendante de h et de Δt .

4. Stabilité

D'une manière générale, on dira que le schéma (4.2) est stable dans l'espace E si et seulement si $\|u_h\|_E$ reste borné.

Définition 4.1.6 Un schéma numérique est dit E stable s'il existe une constante $C_2 > 0$, indépendante de h et de Δt telle que :

$$\|u_h\|_E \leq C_2.$$

Remarque : Dans le cas linéaire où $f(u) = au$, on peut prendre comme espace fonctionnel $E = L^2(X)$, et utiliser l'analyse de Fourier afin d'étudier la stabilité. On va également utiliser le résultat suivant :

Soit le schéma numérique

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-q}^{+q} c_l u_{j+l}^n$$

où les coefficients constants c_l ($-q \leq l \leq q$) dépendent de a et r .

En injectant dans le schéma, le mode de Fourier $[g(\theta)]^n e^{ij\theta}$, on obtient la valeur du

$$\text{facteur d'amplification : } g(\theta) = \sum_{l=-q}^{+q} c_l e^{il\theta}.$$

Le schéma numérique est L^2 stable au sens des différences finies si et seulement si son facteur d'amplification $g(\theta)$ vérifie

$$|g(\theta)| \leq 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

La relation (4.3) est appelée condition de Von-Neumann.

Dans le cas non linéaire on utilise d'autres espaces fonctionnels comme, par exemple, $E = L^\infty(X)$ ou bien $E = BV(X)$.

5. Monotonie

Définition 4.1.7 *Un schéma est monotone si l'opérateur H est une fonction croissante de chacun de ses arguments.*

6. Principe du maximum

Définition 4.1.8 *Un schéma à q points satisfait au principe du maximum si*

$$\min_{i=-q, \dots, q} u_{j+i}^n \leq u_j^{n+1} \leq \max_{i=-q, \dots, q} u_{j+i}^n, \quad j \in \mathbb{Z} \quad \text{et } n \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que le principe du maximum induit la stabilité L^∞ .

7. TVD

Pour les fonctions utilisées dans ce travail, on utilise la définition de la variation totale :

$$TV(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |u(x+\epsilon, t) - u(x, t)| dx dt + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t+\epsilon) - u(x, t)| dx dt.$$

Remarquons que u_h étant constante par morceaux, cette définition induit :

$$TV(u_h) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=-J}^J \left[\Delta t |u_{j+1}^n - u_j^n| + h |u_j^{n+1} - u_j^n| \right] = \sum_{n=0}^N \left[\Delta t TV_{\mathbb{R}}(u^n) + \|u^{n+1} - u^n\|_{L^1(\Omega)} \right]$$

où J et N sont des entiers finis ou infinis, et

$$TV_{\mathbb{R}}(u^n) = \sum_{j=-J}^J |u_{j+1}^n - u_j^n|.$$

Définition 4.1.9 *Un schéma numérique est dit TVD (Variation Totale Décroissante) si et seulement si (voir, par exemple, [Lev92])*

$$TV_{\mathbb{R}}(u^{n+1}) \leq TV_{\mathbb{R}}(u^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cas particuliers des schémas sous forme incrémentale

Un schéma est dit sous forme incrémentale s'il s'écrit sous la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + c_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - d_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n).$$

Remarquons que l'on peut également écrire :

$$u_j^{n+1} = d_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-1}^n + \left(1 - c_{j+\frac{1}{2}}^n - d_{j-\frac{1}{2}}^n\right) u_j^n + c_{j+\frac{1}{2}}^n u_{j+1}^n. \quad (4.4)$$

On a alors les résultat suivant :

Proposition 4.1.10 *Un schéma numérique, écrit sous la forme (4.4) est TVD sous la condition suffisante :*

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad d_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1, \quad \forall j, \forall n.$$

De plus, il vérifie le principe du maximum local, et est donc L^∞ stable sous la condition suffisante :

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad d_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j-\frac{1}{2}}^n \leq 1, \quad \forall j, \forall n.$$

4.1.3 Rappel de quelques résultats de stabilité et de convergence

On rappelle ici quelques résultats utiles :

Théorème d'équivalence de Lax :

Théorème 4.1.11 [Str89] *Un schéma numérique linéaire DF-consistant est L^2 -stable si et seulement si il est convergent.*

Théorème 4.1.12 [GR91] *Supposons que $u_0 \in BV(\mathbb{R})$, ; alors un schéma numérique sous forme conservative, à flux continûment lipschitzien, TVD et L^∞ stable, est convergent.*

Théorème 4.1.13 [GR91] *Un schéma numérique sous forme conservative, consistant, L^∞ stable, convergent, et consistant avec toute condition d'entropie, converge vers l'unique solution entropique du problème.*

Conséquences de la propriété de monotonie :

Théorème 4.1.14 [GR91] *Un schéma aux volumes finis monotone qui peut se mettre sous forme conservative, est nécessairement TVD et L^∞ stable.*

Théorème 4.1.15 [GR91] *Un schéma monotone et consistant est nécessairement consistant avec toute condition d'entropie.*

4.2 Schéma de Rusanov

Le schéma de Rusanov sous forme conservative s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r^n [\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - \phi(u_{j-1}^n, u_j^n)],$$

où $r^n = \frac{\Delta t^n}{h}$.

Le flux numérique de Rusanov est donné par [Rus61]

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{2} (f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)) - \frac{1}{2} S_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n),$$

où $S_{j+\frac{1}{2}}^n$ représente la vitesse locale de Rusanov ; elle dépend des deux états voisins u_j^n et u_{j+1}^n et s'écrit $S_{j+\frac{1}{2}}^n = \max(|f'(u_j^n)|, |f'(u_{j+1}^n)|)$.

4.2.1 Cas linéaire homogène

On se place dans le cas où $f(u) = au$, $a \in \mathbb{R}$.

La vitesse locale de Rusanov $S_{j+\frac{1}{2}}^n$ est alors égale à $|a|$ pour tout j .

Le schéma prend alors la forme suivante :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r^n(a - |a|)}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{r^n(a + |a|)}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n),$$

autrement dit on retrouve le schéma décentré, consistant d'ordre 1, et stable sous la condition CFL :

$$r^n |a| \leq 1.$$

4.2.2 Cas non linéaire homogène

Dans ce cas, on se contentera de montrer les propriétés de consistance, de stabilité L^∞ et de TVD.

Proposition 4.2.1 *Le schéma de Rusanov est à flux continu lipschitzien.*

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 |\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u)| &= \left| \frac{1}{2} (f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)) - \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) - f(u) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2} (f(u_{j+1}^n) - f(u)) + \frac{1}{2} (f(u_j^n) - f(u)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (u_{j+1}^n - u + u - u_j^n) \right|;
 \end{aligned}$$

f étant une fonction régulière, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis : il existe deux valeurs $c_1 \in [\min(u_{j+1}^n, u), \max(u_{j+1}^n, u)]$ et $c_2 \in [\min(u_j^n, u), \max(u_j^n, u)]$, telles que :

$$\begin{aligned}
 |\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u)| &= \frac{1}{2} \left| f'(c_1)(u_{j+1}^n - u) + f'(c_2)(u_j^n - u) - S_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u) \right. \\
 &\quad \left. + S_{j+\frac{1}{2}}^n(u_j^n - u) \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(\left| f'(c_1) - S_{j+\frac{1}{2}}^n \right| |u_{j+1}^n - u| + \left| f'(c_2) + S_{j+\frac{1}{2}}^n \right| |u_j^n - u| \right) \\
 &\leq \max \left(\left| f'(c_2) + S_{j+\frac{1}{2}}^n \right|, \left| f'(c_1) - S_{j+\frac{1}{2}}^n \right| \right) \max_{0 \leq i \leq 1} |u_{j+i}^n - u| \\
 &\leq 2fp_M \max_{0 \leq i \leq 1} |u_{j+i}^n - u|.
 \end{aligned}$$

Proposition 4.2.2 *Sous la condition*

$$r^n S_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad (4.5)$$

le schéma est TVD et L^∞ stable.

Démonstration :

Le schéma de Rusanov est un schéma à trois points; il admet alors une unique forme incrémentale :

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{r^n}{2} \left[(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) + (f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)) - S_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) \right. \\
 &\quad \left. + S_{j-\frac{1}{2}}^n(u_j^n - u_{j-1}^n) \right] \\
 &= u_j^n + \frac{r^n}{2} \left[S_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n} \right] \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{r^n}{2} \left[\frac{\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n} + S_{j-\frac{1}{2}}^n \right] \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n
 \end{aligned}$$

où $\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^n = f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)$.

On peut alors écrire l'équation précédente sous la forme incrémentale suivante :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + c_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - d_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n$$

avec

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n = -\frac{r^n}{2} \frac{\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n} + \frac{r^n S_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}$$

et

$$d_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{r^n}{2} \frac{\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n} + \frac{r^n S_{j-\frac{1}{2}}^n}{2}.$$

Le schéma est TVD si :

$$d_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \text{ et } d_{j+\frac{1}{2}}^n + c_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1.$$

D'après l'hypothèse H1, et par définition de $S_{j+\frac{1}{2}}^n$, on a $c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0$ et $d_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0$.

D'autre part, la condition CFL donne

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j+\frac{1}{2}}^n = r^n S_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1;$$

le schéma est donc TVD .

Par ailleurs, l'hypothèse H1 nous donne aussi $\left| \frac{\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n} \right| \leq S_{j+\frac{1}{2}}^n$, ce qui implique que $0 \leq c_{j+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{2}$ et que $0 \leq d_{j+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{2}$, pour tout j et tout n .

On a donc $0 \leq c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$, ce qui induit que le principe du maximum local est satisfait, et implique donc que le schéma est L^∞ stable.

4.3 Schéma SRNHR (cas homogène)

Le schéma SRNHR (Solveur de Riemann Non Homogène Rusanov) a été décrit et expliqué précédemment. On rappelle ici qu'il s'écrit, dans le cas scalaire 1D homogène, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} [f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)] \\ u_j^{n+1} = u_j^n - r_j^n [\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - \phi(u_{j-1}^n, u_j^n)]. \end{cases} \quad (4.6)$$

On pose $r_j^n = \frac{\Delta t^n}{h_j}$.

Le flux numérique de SRNHR est défini par :

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+\frac{1}{2}}^n).$$

4.3.1 Cas linéaire homogène

On se place dans le cas où $f(u) = au$, $a \in \mathbb{R}$.

La vitesse locale de Rusanov $S_{j+\frac{1}{2}}^n$ est alors égale à $|a|$ pour tout j .

Afin de mener l'analyse du schéma d'un point de vue différences finies, nous supposons dans la partie qui suit que $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = \beta$ et $r_j^n = r$ sont constants.

1. L^2 stabilité :

On peut écrire le schéma SRNHR sous la forme suivante :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu}{2} \beta \operatorname{sgn}(a) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (4.7)$$

avec $\nu = ar$.

En injectant $u_j^n = [g(\theta)]^n e^{ij\theta}$ dans (4.7), on obtient

$$g(\theta) = 1 - \nu i \sin(\theta) + |\nu| \beta (\cos(\theta) - 1).$$

On pose $x = \sin^2(\frac{\theta}{2})$, et $\Psi(x) = \nu^2 - |\nu| \beta + \nu^2 (\beta^2 - 1)x$; on montre alors que le schéma est L^2 stable, si et seulement si $g(\theta)^2 \leq 1$, ce qui équivaut à $\Psi(x) \leq 0$.

La fonction $\Psi(x)$ étant affine, pour que $\Psi(x) \leq 0$, $\forall x \in [0, 1]$, il suffit de vérifier que $\Psi(0) \leq 0$ et que $\Psi(1) \leq 0$.

Pour que ces conditions soient satisfaites simultanément, il suffit alors d'avoir la condition

$$|a|r \leq \min\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right). \quad (4.8)$$

Ainsi le schéma SRNHR est L^2 stable sous cette condition.

2. DF-consistance :

L'erreur de troncature du schéma s'écrit :

$$ET(x, t) = \frac{1}{2} h |a| (|\nu| - \beta) u_{xx}(x, t) + o(h^2).$$

Le schéma est donc consistant d'ordre 1, sauf si $\beta = |\nu|$, auquel cas le schéma est consistant d'ordre 2 (on retrouve le schéma de Lax-Wendroff).

3. Convergence

Le schéma SRNHR étant DF-consistant et L^2 stable dans le cas linéaire, par le théorème d'équivalence de Lax, est convergent.

Remarquons que le taux de diffusion du schéma est directement lié à la valeur du paramètre β .

Considérons maintenant les propriétés satisfaites par le schéma SRNHR sous l'angle volumes finis.

1. VF-consistance :

Quand $u_j^n = u_{j+1}^n$ alors $u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_j^n$ et donc le flux numérique $\phi(u_j^n, u_j^n)$ est égal à $f(u_j^n)$; le schéma est donc consistant.

2. Le schéma SRNHR est à flux continu lipschitzien ;
en effet, on a

$$f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) = \phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{a}{2} [(u_j^n + u_{j+1}^n) - \beta \operatorname{sgn}(a)(u_{j+1}^n - u_j^n)]$$

et donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u)| &= \frac{|a|}{2} |(1 - \beta \operatorname{sgn}(a))(u_{j+1}^n - u) + (1 + \beta \operatorname{sgn}(a))(u_j^n - u)| \\ &\leq |a| \max(|1 - \beta \operatorname{sgn}(a)|, |1 + \beta \operatorname{sgn}(a)|) \max_{0 \leq i \leq 1} |u_{j+i}^n - u| \\ &\leq |a| (1 + \beta) \max_{0 \leq i \leq 1} |u_{j+i}^n - u| \leq |a| (1 + \beta_{\max}) \max_{0 \leq i \leq 1} |u_{j+i}^n - u|. \end{aligned}$$

3. Monotonie :

On peut écrire le flux numérique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) &= u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2} [(1 - \beta \operatorname{sgn}(a))(u_{j+1}^n - u_j^n) + \\ &\quad (1 + \beta \operatorname{sgn}(a))(u_j^n - u_{j-1}^n)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

On va établir les conditions pour que H soit localement croissant par rapport à chacun de ses arguments :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_j^n} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\nu}{2} \beta \operatorname{sgn}(a)(2)\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow |a|r &\leq \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Remarque : On a vu que cette condition devait être vérifiée pour que le schéma soit $\overline{L^2}$ stable.

D'autre part,

$$\frac{\partial H}{\partial u_{j+1}^n} \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq \frac{|a|}{a},$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u_{j-1}^n} \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq -\frac{|a|}{a}.$$

On a donc la condition suivante de monotonie :

$$\beta^n \geq 1. \quad (4.11)$$

La condition (4.8) devient alors identique dans ce cas à la condition (4.10).

On en déduit que pour le cas linéaire, le schéma SRNHR étant à flux continu lipschitzien et monotone, il est *TVD* et L^∞ stable sous les conditions (4.10) et (4.11), et il est donc convergent.

Conclusion : D'après le théorème (4.1.13), dans le cas linéaire, le schéma SRNHR est L^∞ stable, convergent et monotone (donc consistant avec toute condition d'entropie). La solution du problème linéaire obtenue par le schéma SRNHR converge donc vers l'unique solution entropique du problème.

4.3.2 Cas non linéaire homogène

Dans ce cas, on se contentera de montrer les propriétés de consistance, de stabilité L^∞ et de *TVD*.

On se place dans le cas général où le paramètre $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ dépend de j et de n .

On peut écrire le schéma SRNHR sous la forme

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(g(u_j^n, u_{j+1}^n)) = (f \circ g)(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

avec

$$g(u_j^n, u_{j+1}^n) = u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) \right].$$

Comme f est une fonction de classe C^1 , on peut appliquer le théorème des accroissements finis :

il existe $c \in [\min(u_{j+\frac{1}{2}}^n, u), \max(u_{j+\frac{1}{2}}^n, u)]$, $c_1 \in [\min(u_{j+1}^n, u), \max(u_{j+1}^n, u)]$ et $c_2 \in [\min(u_j^n, u), \max(u_j^n, u)]$, telles que :

$$\begin{aligned} |\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u)| &= |f(g(u_j^n, u_{j+1}^n)) - f(u)| \\ &= \frac{|f'(c)|}{2} \left| u_j^n + u_{j+1}^n - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} [f(u_{j+1}^n) - f(u) - f(u_j^n) + f(u)] - 2u \right| \\ &\leq |f'(c)| \max \left(\left| 1 - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} f'(c_1) \right|, \left| 1 + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} f'(c_2) \right| \right) \max_{0 \leq i \leq 1} |u_{j+i}^n - u|. \end{aligned}$$

Le schéma est donc à flux continu lipschitzien.

Proposition 4.3.1 On pose $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_1 = \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{s_{j+\frac{1}{2}}^n}, \forall j, \forall n$.

Alors sous la condition

$$\alpha^n M r^n \leq 1, \quad (4.12)$$

le schéma SRNHR est TVD, respecte le principe du maximum et est donc L^∞ stable.

Preuve :

Nous voulons établir que pour tout $p \in \mathbb{N}$, et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les deux résultats suivants :

$$\text{R1)} \min(u_{j-1}^p, u_j^p, u_{j+1}^p) \leq u_j^{p+1} \leq \max(u_{j-1}^p, u_j^p, u_{j+1}^p);$$

$$\text{R2)} TV(u^{p+1}) \leq TV(u^p).$$

Remarquons que le résultat R1 induit la L^∞ stabilité dès lors que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Hypothèse de récurrence : supposons que les résultats R1 et R2 sont vérifiés pour $p \leq n-1$.

Le schéma SRNHR est un schéma à trois points. Il admet alors une unique forme incrémentale. Pour l'établir, écrivons l'étape prédicteur sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_j^n + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} a_{j+\frac{1}{2}}^n \right] \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n \\ u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_{j+1}^n - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} a_{j+\frac{1}{2}}^n \right] \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n. \end{cases} \quad (4.13)$$

Notons $\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} a_{j+\frac{1}{2}}^n$.

Remarquons alors que l'on peut écrire :

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n)u_j^n + \frac{1}{2}(1 - \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n)u_{j+1}^n. \quad (4.14)$$

On utilise la formule des accroissements finis ; le flux numérique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) &= f(u_j^n) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} a_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n), \\ &= f(u_j^n) + \frac{1}{2} (1 - \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n) \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n), \end{aligned}$$

ou encore

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) = f(u_{j+1}^n) - \frac{1}{2} (1 + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n) \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n a(u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n).$$

Ainsi, on peut réécrire le schéma sous la forme

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{r_j^n}{2} \left[\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n - 1 \right] a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n \\ &\quad - \frac{r_j^n}{2} \left[\gamma_{j-\frac{1}{2}}^n + 1 \right] a(u_j^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n) \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n, \end{aligned}$$

ou bien encore, sous forme incrémentale

$$u_j^{n+1} = u_j^n + c_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - d_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n,$$

avec

$$\begin{aligned} c_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{r_j^n}{2} [\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n - 1] a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) \\ \text{et } d_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{r_j^n}{2} [\gamma_{j-\frac{1}{2}}^n + 1] a(u_j^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n). \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour respecter la relation R1 pour $p = n$ est alors donnée par :

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad d_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j-\frac{1}{2}}^n \leq 1.$$

De la même façon, une condition suffisante pour respecter la relation R2 pour $p = n$ est alors donnée par :

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad d_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1.$$

La condition $c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0$ donne

$$|\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| \geq 1 \Rightarrow \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|};$$

$$\text{or } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{s_{j+\frac{1}{2}}^n} \Rightarrow \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|}, \text{ et aussi } \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^n}{s_{j+\frac{1}{2}}^n}.$$

On effectue la majoration de $|\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n|$ par

$$|\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| = \frac{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|}{s_{j+\frac{1}{2}}^n} \leq \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{s_{j+\frac{1}{2}}^n} \leq \alpha^n \leq \frac{fpM}{fpm} = \alpha_{max}.$$

Notons d'abord que grâce à l'équation (4.14) et au résultat R1 vrai pour $p \leq n-1$, on peut établir que

$$|u_{j+\frac{1}{2}}^n| \leq \frac{1}{2} \left(|1 + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| + |1 - \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| \right) \|u_0\|_\infty,$$

ce qui implique

$$|u_{j+\frac{1}{2}}^n| \leq |\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| \|u_0\|_\infty \leq \alpha^n \|u_0\|_\infty \leq \alpha_{max} \|u_0\|_\infty.$$

Donc $u_{j+\frac{1}{2}}^n \in G$.

Par ailleurs, au vu des hypothèses, on a

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \text{ et } d_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \Leftrightarrow |\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|}{s_{j+\frac{1}{2}}^n} \geq 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq c_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{r_j^n}{2} \left[\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n \operatorname{sgn}(f') - \operatorname{sgn}(f') \right] \mid a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) \mid \leq \frac{r_j^n}{2} (\alpha^n - \operatorname{sgn}(f')) M \\
 \text{et} \\
 & 0 \leq d_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{r_j^n}{2} \left[\gamma_{j-\frac{1}{2}}^n \operatorname{sgn}(f') + \operatorname{sgn}(f') \right] \mid a(u_j^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n) \mid \leq \frac{r_j^n}{2} (\alpha^n + \operatorname{sgn}(f')) M, \\
 \text{d'où} \\
 & c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j+\frac{1}{2}}^n \leq \alpha^n r_j^n M \leq 1.
 \end{aligned}$$

Donc ce schéma est *TVD* et L^∞ stable sous la condition CFL.

4.3.3 Etude locale du paramètre de contrôle dans l'étape prédicteur

Dans cette partie, nous nous proposons de moduler la valeur du paramètre de contrôle en fonction du comportement local du schéma. Pour cela nous allons évaluer l'ordre du schéma SRNHR. Le schéma peut également s'écrire sous la forme :

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \quad (4.15)$$

où

$$H(x_{-1}, x_0, x_1) = x_0 - r_j^n [(f \circ g)(x_0, x_1) - (f \circ g)(x_{-1}, x_0)]. \quad (4.16)$$

L'erreur de troncature est donnée par (voir [GR91]) :

$$ET = -\Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left[B(u, r) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

avec

$$B(u, r) = \frac{1}{2r^2} \sum_{i=-1}^{i=1} i^2 \frac{\partial H}{\partial x_i}(u, u, u) - \frac{1}{2} f'(u)^2. \quad (4.17)$$

A partir de la relation (4.16) et en notant $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = [\alpha(u^n)]_{j+\frac{1}{2}}$, où $\alpha(u)$ est défini ultérieurement, on aura

$$\frac{\partial H(u, u, u)}{\partial x_1} = -r f'(u) \frac{\partial g(u, u)}{\partial x_1},$$

or

$$\frac{\partial g(u_j^n, u_{j+1}^n)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{\partial x_1} (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n f'(u_{j+1}^n) \right]$$

où $\theta_{j+\frac{1}{2}}^n$ est une régularisation de $\frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n}$.

Donc

$$\frac{\partial g(u, u)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha(u)}{|f'(u)|} f'(u) \right) = \frac{1}{2} (1 - \alpha(u) \operatorname{sgn}(f')),$$

où, pour tout j , $[\alpha(u)]_{j+\frac{1}{2}}$ étant constant est noté $\alpha(u)$, on a

$$\frac{\partial g(u, u)}{\partial x_0} = \frac{1}{2} (1 + \alpha(u) \operatorname{sgn}(f'))$$

et

$$\frac{\partial g(u, u)}{\partial x_{-1}} = \frac{1}{2} (1 + \alpha(u) \operatorname{sgn}(f')).$$

On calcule $\sum_{i=-1}^{i=1} i^2 \frac{\partial H}{\partial x_i}(u, u, u) = r\alpha(u)|f'(u)|$,

puis on l'injecte dans (4.17) ; on a alors

$$B(u, r) = \frac{1}{2(r)^2} (r\alpha(u)|f'(u)|) - \frac{1}{2} f'(u)^2 = \frac{|f'(u)|}{2r} [\alpha(u) - r|f'(u)|] ,$$

donc $B(u, r) = 0$ sous la condition

$$\alpha(u) = r|f'(u)|.$$

Cela nous indique un choix particulier du paramètre de contrôle, sous la forme :

$$(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_2 = r_j^n S_{j+\frac{1}{2}}^n,$$

ce qui aboutit au schéma :

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{r_j^n}{2} [f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)] \\ u_j^{n+1} = u_j^n - r_j^n [f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^n)] . \end{cases}$$

On remarque alors que l'on retrouve le schéma de Richtmeyer d'ordre deux en espace et en temps (voir [Lev92]).

Au vu de cette analyse, et afin de conserver le maximum de bonnes propriétés au schéma *SRNHR*, une stratégie de variation locale du paramètre $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$, basée sur la théorie des limiteurs a été adoptée. On écrit alors :

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = \Psi_{j+\frac{1}{2}}(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_2 + \left(1 - \Psi_{j+\frac{1}{2}}\right) (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_1, \quad (4.18)$$

où $\Psi_{j+\frac{1}{2}} = \Psi(u_j^n, u_{j+1}^n)$ est un limiteur donné (par exemple Superbee ou Van-Leer) (consulter [Lev02], [Hir90] et [Tor99]).

Le schéma peut ainsi être rendu d'ordre 1 dans les zones à forte variation de l'écoulement, et d'ordre 2, là où l'écoulement est régulier.

Bibliographie

- [GR91] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques & Applications (Paris), vol. 3/4, Ellipses, Paris, 1991.
- [Hir90] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows. volume2 : Computational methods for inviscid and viscous flows*, Wiley Series in Numerical Methods in Engineering. Wiley-Interscience Publication, 1990.
- [Kru70] S. N. Krushkov, *First order quasilinear equation with several independant variables.*, Math.Sbornik USSR **10** (1970), 217–243.
- [Lev92] Randall J. Leveque, *Numerical methods for conservation laws*, second ed., Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. MR 92m :65106
- [Lev02] ———, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Rus61] V.V. Rusanov, *Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles.*, J. Comp. Math. Phys. USSR **1** (1961), 267–279.
- [Str89] J.C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1989.
- [Tor99] E. F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Second Edition, Springer-Verlag, 1999.

Chapitre 5

Sur l'approximation des gradients dans l'évaluation de l'état intermédiaire du schéma SRNHR : cas unidimensionnel

Dans le chapitre précédent, une analyse des schémas a été réalisée. Le manque éventuel de consistance, notamment due à l'approximation des gradients, nous incite à réaliser une telle analyse, mais sur des maillages non uniformes, afin d'avoir une première approche du comportement des schémas en deux dimensions d'espace.

5.1 Cas linéaire

On considère l'équation hyperbolique à une dimension d'espace suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

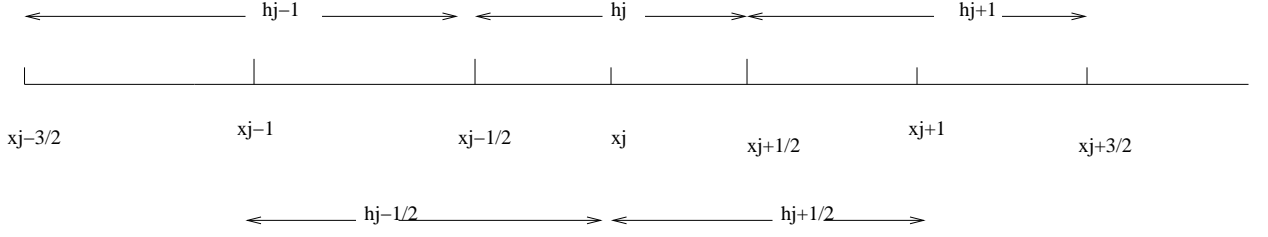
avec $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(u) = au$, $a > 0$.

On va construire des schémas volumes finis d'ordre 1 puis d'ordre 2 en espace sur des maillages uniformes ou non.

On s'intéresse à la consistance et à l'ordre en espace théorique obtenu, en utilisant différentes méthodes de discrétisation.

Ordre 1 en espace

On discrétise le domaine en espace et en temps : on pose $h_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$, $j \in \mathbb{Z}$ et $\Delta t_n = t^{n+1} - t^n = \Delta t$ constant ici, pour tout $n \in \mathbb{N}$.



On pose également $h_{j-\frac{1}{2}} = \frac{h_j + h_{j-1}}{2}$ et on supposera vérifiées les conditions de régularité du maillage non uniforme suivantes (on pourra consulter [EGH00]) :

Il existe $\sigma > 0$ telle que

$$\frac{1}{\sigma + 1} \leq \frac{h_j}{h_{j+1}} \leq \sigma + 1. \quad (5.2)$$

La condition (5.2) est équivalente à

$$h_{j+1} \left[\left(\frac{1}{\sigma + 1} - 1 \right) \right] \leq h_j - h_{j+1} \leq h_{j+1} \sigma,$$

aussi on a $h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} h_{j+1} \left[\frac{h_j}{h_{j+1}} + 1 \right]$,

et donc

$$\begin{aligned} \frac{h_{j+1}}{2} \frac{\sigma + 2}{\sigma + 1} &\leq \frac{1}{2} h_{j+1} \left[\frac{h_j}{h_{j+1}} + 1 \right] \leq (\sigma + 2) \frac{h_{j+1}}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \frac{\sigma + 1}{\sigma + 2} &\geq \frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \geq \frac{2}{\sigma + 2}, \quad \forall j. \end{aligned} \quad (5.3)$$

On note $h = \max_j(h_j) \Rightarrow h_j \leq h$ et $h_{j+\frac{1}{2}} \leq h, \forall j$.

Dans le cas linéaire, le schéma d'ordre 1 en espace et en temps s'écrit sous la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r_j [\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - \phi(u_{j-1}^n, u_j^n)] \quad (5.4)$$

où $r_j = \frac{\Delta t}{h_j}$ et ϕ décrit le flux numérique.

On choisit de prendre un schéma décentré : dans ce cas le flux numérique s'écrit

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = a u_j^n.$$

En injectant cette valeur du flux dans (5.4), on obtient

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu_j (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

avec $\nu_j = \frac{a \Delta t}{h_j}$.

L'erreur du troncature, au point (x, t) , est définie par

$$ET(x, t) = \frac{1}{\Delta t} [u(x, t + \Delta t) - \tilde{u}_{\Delta t}(x, t)],$$

où $u(., t + \Delta t)$ et $\tilde{u}_{\Delta t}(., t)$ sont les solutions exacte et numérique respectivement, à l'instant $t + \Delta t$.

Maillage uniforme :

Dans le cas d'un maillage uniforme ($h_j = h$ constant, $\forall j \in \mathbb{Z}$), après avoir effectué un développement de Taylor, l'erreur de troncature obtenue est :

$$ET(x, t) = \frac{ah}{2}(\nu - 1)u_{xx} + o(h^2) + o(\Delta t).$$

Pour $\nu = 1$, le schéma est donc consistant d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps et si $\nu \neq 1$, le schéma est donc consistant d'ordre 1 en espace et en temps.

Maillage non uniforme :

Comme précédemment, en développant $u = u(x, t + \Delta t)$ au voisinage de t et $u(x_j - h_{j-\frac{1}{2}}, t)$, au voisinage de (x, t) , on obtient :

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x, t) + o(\Delta t^3) \quad (5.5)$$

et

$$u(x - h_{j-\frac{1}{2}}, t) = u(x, t) - h_{j-\frac{1}{2}} u_x(x, t) + \frac{h_{j-\frac{1}{2}}^2}{2} u_{xx}(x, t) + o(h_{j-\frac{1}{2}}^3). \quad (5.6)$$

Dans ce cas, l'erreur du troncature au point (x_j, t^n) est

$$ET(x_j, t^n) = u_t(x_j, t^n) + \frac{ah_{j-\frac{1}{2}}}{h_j} u_x(x_j, t^n) - \frac{ah_{j-\frac{1}{2}}^2}{h_j} u_{xx}(x_j, t^n) + o(h_{j-\frac{1}{2}}^2) + o(\Delta t).$$

Ce schéma n'est donc pas consistant avec l'équation aux dérivées partielles (5.1) au sens des différences finies. Cependant, Th. Gallouet et al. ([EGH00]) ont montré que ce schéma était consistant au sens des volumes finis.

5.2 Ordre 2 en espace

Pour améliorer l'ordre en espace des schémas volumes finis utilisés, au lieu de considérer que les valeurs u_j^n sont constantes sur chaque cellule, à l'étape n , on va les supposer affines par morceaux. Il est nécessaire de construire une évaluation directe du gradient à l'interface. Pour ce faire, à l'interface de chaque cellule, on définit donc les quantités à gauche et à droite

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n-} = u_j^n + \frac{h_j}{2} u_j'^{\prime}$$

et

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+} = u_{j+1}^n - \frac{h_{j+1}}{2} u_{j+1}'^{\prime},$$

où $u_j'^{\prime}$ représente le gradient de la solution, que l'on va chercher à déterminer (voir par exemple, [GR91], [Elm99]).

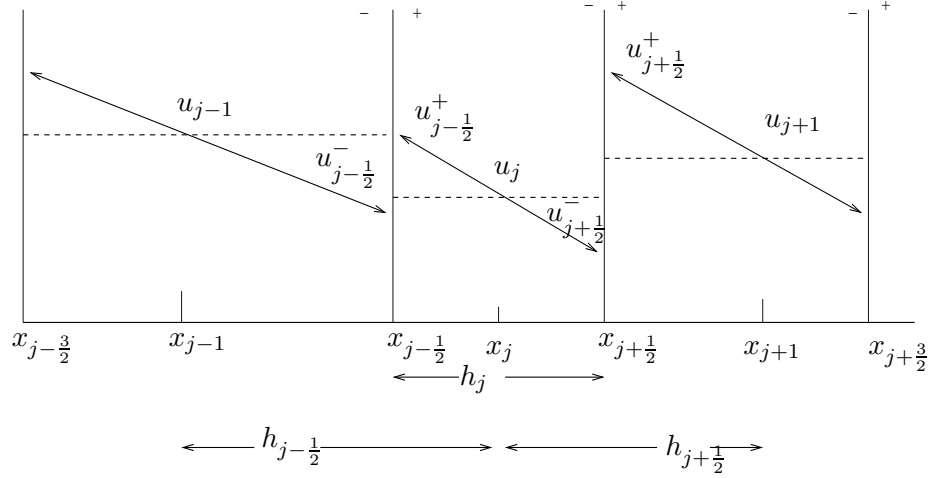


FIG. 5.1 –

Le schéma d'ordre 2, dans le cas d'un maillage quelconque s'écrit alors

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r_j \left(\phi(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+) - \phi(u_{j-\frac{1}{2}}^-, u_{j-\frac{1}{2}}^+) \right).$$

Si, on choisit un schéma décentré, on obtient :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu_j (u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{\nu_j}{2} (h_j u_j' - h_{j-1} u_{j-1}') \quad (5.7)$$

où $\nu_j = \frac{a\Delta t}{h_j}$.

On va utiliser différentes façons de calculer les valeurs reconstruites des gradients u_j' . Dans un premier temps, on décrit trois méthodes de calcul du gradient utilisées dans notre travail, puis ensuite nous calculerons l'erreur de troncature obtenue en utilisant chacune des méthodes proposées.

Description des méthodes :

1. Méthode de différences finies centrées :

On choisit d'approcher le gradient par des différences finies centrées, pour un maillage quelconque.

Ce gradient est obtenu en développant $u(x + h_{j+\frac{1}{2}}, t)$ et $u(x - h_{j-\frac{1}{2}}, t)$ au voisinage de (x_j, t^n) .

Le gradient numérique s'écrit alors :

$$u_j' = \frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{h_{j+\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{1}{2}}}. \quad (5.8)$$

2. Méthode des moindres carrés :

On considère une fonction : $\zeta(x) = \zeta(x_j) + (x - x_j)\zeta'(x)$.

On veut calculer $\zeta'(x)$ en minimisant la quantité :

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{u'_j} \varphi(u'_j)$$

où

$$\varphi(u'_j) = [(\zeta(x_{j+1}) - u_{j+1}^n)^2 + (\zeta(x_{j-1}) - u_{j-1}^n)^2].$$

Ici $\zeta(x_{j+1}) = u_j^n + h_{j+\frac{1}{2}} u'_j$ et $\zeta(x_{j-1}) = u_j^n - h_{j-\frac{1}{2}} u'_j$.

On obtient donc

$$\varphi(u'_j) = [(\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - u'_j h_{j+\frac{1}{2}})^2 + (\Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n - u'_j h_{j-\frac{1}{2}})^2],$$

où on a posé $\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_{j+1}^n - u_j^n$.

On veut que $\varphi'(u'_j) = 0$, soit donc

$$\left[-(\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - u'_j h_{j+\frac{1}{2}}) h_{j+\frac{1}{2}} - (\Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n - u'_j h_{j-\frac{1}{2}}) h_{j-\frac{1}{2}} \right] = 0$$

ce qui donne

$$u'_j = \frac{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n h_{j+\frac{1}{2}} + \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n h_{j-\frac{1}{2}}}{h_{j+\frac{1}{2}}^2 + h_{j-\frac{1}{2}}^2}. \quad (5.9)$$

Si le maillage est uniforme, on a

$$u'_j = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}.$$

Dans ce cas (maillage uniforme), l'approximation du gradient par ces deux méthodes est le même.

3. Méthode de Green :

Cette méthode s'appuie sur la formule de Green : on intègre $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur l'intervalle $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$:

$$h_j u'_j = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial x} dx = [u]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} = \hat{u}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{j-\frac{1}{2}}$$

où

$$\hat{u}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{h_{j+1} u_{j+1} + h_j u_j}{h_j + h_{j+1}}$$

est une interpolation de u sur la frontière $x_{j+\frac{1}{2}}$.

On a donc ici

$$u'_j = \frac{1}{2h_j} \left[\frac{h_{j+1} u_{j+1} + h_j u_j}{h_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{h_{j-1} u_{j-1} + h_j u_j}{h_{j-\frac{1}{2}}} \right] \quad (5.10)$$

avec $h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}$.

A nouveau, si le maillage est uniforme, on retrouve la même définition du gradient que pour les autres méthodes. Ces trois méthodes sont donc équivalentes dès que le maillage est uniforme.

Notre but est d'étudier la consistance et l'ordre des schémas, en choisissant les trois méthodes de calcul du gradient précédemment définies.

Calcul de l'erreur de troncature

1. Méthode des différences finies :

Après avoir injecté u'_j et u'_{j-1} donnés par (5.8) dans l'équation (5.7) on obtient :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \nu_j(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &- \frac{\nu_j}{2} \left[\frac{h_j}{h_{j+\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{1}{2}}} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{h_{j-1}}{h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}}} (u_j^n - u_{j-2}^n) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

En effectuant le développement des quantités

$u_{j+1}^n = u(x_j + h_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$, $u_{j-1}^n = u(x_j - h_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ et $u_{j-2}^n = u(x_j - (h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}}), t^n)$ au voisinage de (x_j, t^n) , on obtient

$$u_{j+1}^n = u(x_j + h_{j+\frac{1}{2}}, t^n) = u(x_j, t^n) + h_{j+\frac{1}{2}} u_x(x_j, t^n) + \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^2}{2} u_{xx}(x_j, t^n) + o(h_{j+\frac{1}{2}}^3),$$

$$u_{j-1}^n = u(x_j - h_{j-\frac{1}{2}}, t^n) = u(x_j, t^n) - h_{j-\frac{1}{2}} u_x(x_j, t^n) + \frac{h_{j-\frac{1}{2}}^2}{2} u_{xx}(x_j, t^n) + o(h_{j-\frac{1}{2}}^3),$$

et

$$\begin{aligned} u_{j-2}^n &= u(x_j - (h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}}), t^n) = u(x_j, t^n) - (h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}}) u_x \\ &+ \frac{(h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}})^2}{2} u_{xx} + o(h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}})^2. \end{aligned}$$

L'erreur de troncature s'écrit alors :

$$\begin{aligned} ET(x_j, t^n) &= u_t(x_j, t^n) + a u_x(x_j, t^n) - \frac{a}{2h_j} \left[h_{j-\frac{1}{2}}^2 + \frac{h_j}{2} (h_{j-\frac{1}{2}} - h_{j+\frac{1}{2}}) \right. \\ &- \left. \frac{h_{j-1}}{2} (h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}}) \right] u_{xx}(x_j, t^n) + o(h_{j\pm\frac{1}{2}}^2) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Ce schéma est donc consistant d'ordre 1 en espace et en temps.

2. Méthode des moindres carrés :

En utilisant le même procédé que précédemment, avec les quantités u'_j et u'_{j-1} données par (5.9), on obtient l'erreur de troncature :

$$\begin{aligned} ET(x_j, t^n) &= u_t(x_j, t^n) + a u_x(x_j, t^n) - \frac{a}{2h_j} \left[h_{j-\frac{1}{2}}^2 + \frac{h_j(h_{j-\frac{1}{2}}^3 - h_{j+\frac{1}{2}}^3)}{2(h_{j+\frac{1}{2}}^2 + h_{j-\frac{1}{2}}^2)} \right. \\ &- \left. \frac{h_{j-1}(h_{j-\frac{1}{2}}^3 + 2h_{j-\frac{1}{2}}h_{j-\frac{3}{2}}^2 + h_{j-\frac{3}{2}}^3)}{2(h_{j-\frac{1}{2}}^2 + h_{j-\frac{3}{2}}^2)} \right] u_{xx}(x_j, t^n) + o(h_{j\pm\frac{1}{2}}^2) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Ce schéma est donc consistant d'ordre 1 en espace et en temps.

3. **Méthode de Green** : Après avoir injecté u'_j et u'_{j-1} donnés par (5.10) dans l'équation (5.7), on obtient l'erreur de troncature suivante :

$$\begin{aligned} ET(x_j, t^n) &= u_t(x_j, t^n) + \frac{a}{h_j} \left[\frac{h_j}{4} + \frac{3h_{j-1}}{4} + \frac{h_{j+1}}{4} - \frac{h_{j-2}}{4} \right] u_x(x_j, t^n) \\ &- \frac{a}{2h_j} \left[h_{j-\frac{1}{2}}^2 + \frac{h_{j-1}h_{j-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{h_{j-1}h_{j-\frac{1}{2}}^2}{4h_{j-\frac{3}{2}}} - \frac{h_{j+1}h_{j+\frac{1}{2}}}{4} \right. \\ &- \left. \frac{h_{j-2}(h_{j-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{3}{2}})^2}{4h_{j-\frac{3}{2}}} \right] u_{xx}(x_j, t^n) + o(h_{j\pm\frac{1}{2}}^2) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Ce schéma n'est donc pas consistant (au sens des différences finies) avec l'équation aux dérivées partielles (5.1).

Remarque :

Dans le cas d'un maillage uniforme les trois méthodes (équivalentes dans ce cas) donnent l'erreur de troncature :

$$ET(x, t) = u_t(x, t) + au_x(x, t) + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x, t) + o(\Delta t^2) + o(h^2).$$

Donc, dans le cas d'un maillage uniforme, ce schéma est consistant d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps, quelque soit le choix utilisé pour le calcul du gradient.

5.3 Propriété TVD du schéma décentré d'ordre deux en espace, dans le cas d'une équation linéaire homogène sur maillage non uniforme

On va maintenant regarder si les schémas d'ordre 2 en espace proposés possèdent la propriété TVD.

On choisit de travailler avec la méthode des moindres carrés pour le calcul du gradient :

$$u'_j = \frac{h_{j+\frac{1}{2}} \Delta u_{j+\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{1}{2}} \Delta u_{j-\frac{1}{2}}}{h_{j-\frac{1}{2}}^2 + h_{j+\frac{1}{2}}^2}.$$

Après avoir injecté u'_j et u'_{j-1} dans l'équation (5.7), on obtient

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n - d_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n + b_{j-\frac{3}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{3}{2}}^n, \quad (5.12)$$

avec

$$\begin{aligned} c_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left(\nu_j + \frac{\nu_j h_j h_{j-\frac{1}{2}}}{2(h_{j-\frac{1}{2}}^2 + h_{j+\frac{1}{2}}^2)} - \frac{\nu_j h_{j-1} h_{j-\frac{1}{2}}}{2(h_{j-\frac{3}{2}}^2 + h_{j-\frac{1}{2}}^2)} \right), \\ d_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\nu_j h_j h_{j+\frac{1}{2}}}{2(h_{j-\frac{1}{2}}^2 + h_{j+\frac{1}{2}}^2)}, \end{aligned}$$

5.3. PROPRIÉTÉ TVD DU SCHÉMA DÉCENTRÉ D'ORDRE DEUX EN ESPACE, DANS LE CAS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE HOMOGÈNE SUR MAILLAGE NON UNIFORME

et

$$b_{j-\frac{3}{2}}^n = \frac{\nu_j h_{j-1} h_{j-\frac{3}{2}}}{2(h_{j-\frac{3}{2}}^2 + h_{j-\frac{1}{2}}^2)}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Pour que ce schéma soit TVD, il suffit donc de vérifier les conditions suivantes (voir [Har83]) :

$$1 - (c_{j+\frac{1}{2}}^n - d_{j+\frac{1}{2}}^n) \geq 0,$$

et

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad b_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \text{ et } d_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0.$$

Mais cela conduit à une contradiction, car $d_{j+\frac{1}{2}}^n$ est positif, $a > 0$ et

$$\frac{h_j h_{j+\frac{1}{2}}}{2(h_{j+\frac{1}{2}}^2 + h_{j-\frac{1}{2}}^2)} > 0.$$

Le schéma proposé ne satisfait donc pas à la condition suffisante (au sens classique) pour être TVD. Cela provient du fait que les gradients peuvent devenir trop importants. Pour y remédier, on va tenter de limiter ces gradients, comme proposé par [Lev02], [GR91].

Pour cela dans l'équation (5.7), on va remplacer u'_j et u'_{j-1} par $\psi_j u'_j$ et $\psi_{j-1} u'_{j-1}$, où $\psi_j = \psi(\theta_j)$ est une fonction, appelée limiteur, vérifiant les propriétés suivantes (on pourra, par exemple, consulter [GR91]) :

$$\begin{aligned} \psi(\theta_j) &= 0 & \text{si } \theta_j \leq 0 \\ 0 \leq \psi(\theta_j) &\leq \min(2, 2\theta_j) & \text{si } \theta_j \geq 0, \end{aligned}$$

où θ_j est le rapport de deux pentes consécutives ; il est défini comme suit :

$$\theta_j = \frac{h_{j+\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n)}{h_{j-\frac{1}{2}}(u_{j+1}^n - u_j^n)}.$$

Le schéma avec limiteur et gradients obtenus par la méthode des moindres carrés, s'écrit alors

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \left[\nu_j - \frac{\nu_j h_{j-1} \psi_{j-1}}{2h_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{\nu_j h_j \psi_j (u_{j+1}^n - u_j^n)}{2h_{j+\frac{1}{2}} (u_j^n - u_{j-1}^n)} \right] (u_j^n - u_{j-1}^n),$$

où on a posé $\psi_j = \psi(\theta_j)$,

ou encore, sous forme incrémentale

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n + d_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n,$$

avec

$$d_{j+\frac{1}{2}}^n = 0$$

et

$$c_{j-\frac{1}{2}}^n = \nu_j \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_{j-1} \psi(\theta_{j-1})}{h_{j-\frac{1}{2}}} - \frac{h_j \psi(\theta_j)}{h_{j-\frac{1}{2}} \theta_j} \right) \right].$$

Pour que ce schéma soit TVD, il doit vérifier la condition suivante :

$$0 \leq \nu_{j+1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_j \psi(\theta_j)}{h_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{h_{j+1} \psi(\theta_{j+1})}{h_{j+\frac{1}{2}} \theta_{j+1}} \right) \right] \leq 1, \quad \forall j \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrons la positivité de $c_{j+\frac{1}{2}}^n$:

On cherche à trouver les conditions pour que

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_j \psi(\theta_j)}{h_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{h_{j+1} \psi(\theta_{j+1})}{h_{j+\frac{1}{2}} \theta_{j+1}} \right)$$

ce qui est équivalent à

$$\psi(\theta_j) \leq 2 \frac{h_{j+\frac{1}{2}}}{h_j} + \frac{h_{j+1}}{h_j} \frac{\psi(\theta_{j+1})}{\theta_{j+1}},$$

or $2 \frac{h_{j+\frac{1}{2}}}{h_j} = \frac{2}{h_j} \frac{1}{2} (h_j + h_{j+1}) = 1 + \frac{h_{j+1}}{h_j}.$

La condition sur le maillage s'écrit (voir 5.2)

$$\frac{1}{\sigma + 1} \leq \frac{h_j}{h_{j+1}} \leq \sigma + 1.$$

On pose

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma + 2}{\sigma + 1} \leq 1 + \frac{h_{j+1}}{h_j} \leq \sigma + 2.$$

En s'inspirant du limiteur de Van-Leer, on introduit

$$\psi(\theta_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_j < 0 \\ \frac{\bar{\sigma} \theta_j}{1 + \theta_j} & \text{si } \theta_j \geq 0. \end{cases}$$

On a alors $0 \leq \psi(\theta_j) \leq \bar{\sigma}$, $\forall \theta_j \in \mathbb{R}$, et donc

$$\psi(\theta_j) \leq \bar{\sigma} \leq 2 \frac{h_{j+\frac{1}{2}}}{h_j} \leq 2 \frac{h_{j+\frac{1}{2}}}{h_j} + \frac{h_{j+1}}{h_j} \frac{\psi(\theta_{j+1})}{\theta_{j+1}},$$

d'où la positivité de $c_{j+\frac{1}{2}}^n$.

Considérons ensuite la majoration $c_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$:

On pose, pour un maillage donné, $\bar{\nu} = \max_j \nu_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, (h_j étant borné), alors

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \leq \bar{\nu} \left(\left[1 - \frac{1}{2} \frac{h_j \psi(\theta_j)}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right] + \left[\frac{1}{2} \frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\psi(\theta_{j+1})}{\theta_{j+1}} \right] \right) = \bar{\nu} (A + B).$$

En prenant le limiteur de Van-Leer, on a $A = F(\theta_j)$ et $B = G(\theta_{j+1})$ où les deux fonctions sont définies par

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} \frac{h_j}{h_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\sigma} x}{(1+x)} \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad F(x) = 1 \quad \text{si } x < 0,$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\sigma}}{(1+x)} \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad G(x) = 0 \quad \text{si } x < 0.$$

F est strictement décroissante entre 0 et $+\infty$

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{h_j \bar{\sigma}}{2h_{j+\frac{1}{2}}}.$$

G est strictement décroissante entre 0 et $+\infty$

$$G(0) = \frac{h_{j+1} \bar{\sigma}}{2h_{j+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad G(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Comme la condition sur le maillage donne $\frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \leq \frac{2}{\bar{\sigma}}$, on a

$$G(0) \leq \frac{1}{2} \frac{2}{\bar{\sigma}} \bar{\sigma} = 1.$$

On a donc $F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ et $G(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$,
ce qui implique que $A + B \leq 2, \forall \theta_j \in \mathbb{R}$,
d'où

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 2\bar{\nu}.$$

Il suffit donc de prendre $\bar{\nu} \leq \frac{1}{2}$ pour avoir $0 \leq c_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$, ce qui définit une condition de stabilité.

5.4 Schéma SRNHR avec maillage non uniforme

On utilise le schéma présenté à la section (3.1.2), dans le cas homogène, sur un maillage non uniforme. Notons que la quantité $\bar{\theta}$ définie en (3.7) dépend maintenant de la maille considérée et devrait s'écrire de la façon suivante :

$$\bar{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n = \max(\bar{\theta}_g, \bar{\theta}_d), \text{ avec } \bar{\theta}_g = \frac{h_j}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} \text{ et } \bar{\theta}_d = \frac{h_{j+1}}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n},$$

mais, pour des raisons de simplification, on a choisi de prendre $\bar{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\bar{\theta}_g + \bar{\theta}_d}{2}$ afin de mener à bien l'analyse du schéma.

Celui-ci s'écrit donc, dans le cas d'un maillage non uniforme :

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{h_j u_j^n + h_{j+1} u_{j+1}^n}{h_j + h_{j+1}} - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} [f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)] \\ u_j^{n+1} = u_j^n - r_j [f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^n)], \end{cases} \quad (5.13)$$

avec $r_j = \frac{\Delta t}{h_j}$.

Dans le cas linéaire :

On va étudier la consistance et l'ordre de ce schéma, dans le cas linéaire $f(u) = au$, avec $a > 0$.

On travaille avec un maillage quelconque. L'étape prédicteur du schéma SRNHR peut également s'écrire sous la forme

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{h_j u_j + h_{j+1} u_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n),$$

car $S_{j+\frac{1}{2}}^n = \max(|f'(u_j^n)|, |f'(u_{j+1}^n)|) = a$.

De même, on peut écrire l'étape correcteur sous la forme

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left[1 - \frac{\nu_j h_j}{h_j + h_{j+1}} - \left(\frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} + \frac{\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \right) \nu_j + \frac{h_j \nu_j}{h_j + h_{j-1}} \right] u_j^n \\ &\quad - \left(\frac{\nu_j h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n \nu_j}{2} \right) u_{j+1}^n + \left(\frac{\nu_j h_{j-1}}{h_j + h_{j-1}} + \frac{\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n \nu_j}{2} \right) u_{j-1}^n. \end{aligned}$$

L'erreur de troncature est donc

$$\begin{aligned} ET(x_j, t^n) &= u_t(x, t^n) + \frac{a}{h_j} \left[\frac{(h_{j+1} + h_{j-1})}{2} + \frac{1}{2} (\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n h_{j-\frac{1}{2}} - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n h_{j+\frac{1}{2}}) \right] u_x(x_j, t^n) \\ &\quad + \left\{ \frac{\Delta t a^2}{2} - \frac{a}{4h_j} \left[h_{j-\frac{1}{2}} h_{j-1} - h_{j+\frac{1}{2}} h_{j+1} + \alpha_{j-\frac{1}{2}}^n h_{j-\frac{1}{2}}^2 + \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n h_{j+\frac{1}{2}}^2 \right] \right\} u_{xx}(x_j, t^n) \\ &\quad + o(h_{j\pm\frac{1}{2}}^2) + o(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Ce schéma n'est donc pas consistant au sens des différences finies (mais il l'est au sens des volumes finis [EGH00]).

Remarque 1 : Dans le cas où le maillage est uniforme, l'erreur de troncature s'écrit :

$$ET(x, t) = u_t + au_x + \frac{ah}{2} (\nu - \alpha) u_{xx} + o(h^2) + o(\Delta t^2).$$

Ce schéma est alors consistant d'ordre 1 en espace et en temps.

Remarque 2 : Si $\alpha = \nu$, alors le schéma est consistant d'ordre 2 en espace et en temps (c'est exactement celui de Lax-Wendroff).

Si $\alpha = 1$, alors on retrouve le schéma décentré.

Pour toutes les autres valeurs de α , le schéma est consistant d'ordre 1 en espace et en temps.

Dans le cas non linéaire :

On a vu précédemment que le flux numérique de ce schéma s'écrit

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+\frac{1}{2}}^n),$$

avec

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{h_j u_j^n + h_{j+1} u_{j+1}^n}{h_j + h_{j+1}} - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 5.4.1 *Sous la condition CFL*

$$\begin{cases} r^n \left[\alpha^n + \frac{\sigma(\sigma+1)}{\sigma+2} \right] M \leq 1 \\ r^n \left[\alpha^n + 2 \frac{\sigma}{\sigma+2} \right] M \leq 1 \end{cases} \quad (5.14)$$

le schéma SRNHR est TVD, respecte le principe du maximum et est donc L^∞ -stable.

Preuve : Le schéma SRNHR est un schéma à trois points. Il admet alors une unique forme incrémentale. On réécrit l'étape prédicteur sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_j^n + \frac{1}{2} \left[\frac{h_{j+1}}{\frac{h_{j+1}+h_j}{2}} - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} a_{j+\frac{1}{2}}^n \right] \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n \\ u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_{j+1}^n - \frac{1}{2} \left[\frac{h_j}{\frac{h_{j+1}+h_j}{2}} + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} a_{j+\frac{1}{2}}^n \right] \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n. \end{cases} \quad (5.15)$$

Notons $\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n a_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n}$.

Remarquons alors que l'on peut écrire

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n \right) u_j^n + \frac{1}{2} \left(\frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} - \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n \right) u_{j+1}^n. \quad (5.16)$$

On utilise la formule des accroissement finis ; le flux numérique s'écrit sous la forme

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) = f(u_j^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{h_{j+1}}{\frac{h_{j+1}+h_j}{2}} - \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n),$$

ou encore

$$\phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) = f(u_{j+1}^n) - \frac{1}{2} \left(\frac{h_j}{\frac{h_{j+1}+h_j}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n a(u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n).$$

Ainsi, on peut réécrire le schéma sous la forme

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2} \left[\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{h_j}{\frac{h_{j+1}+h_j}{2}} \right] a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n \\ - \frac{r}{2} \left[\gamma_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{h_{j-1}}{\frac{h_{j-1}+h_j}{2}} \right] a(u_j^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n) \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n, \end{aligned}$$

ou bien encore, sous forme incrémentale

$$u_j^{n+1} = u_j^n + c_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - d_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n, \quad (5.17)$$

avec

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{r}{2} \left[\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{h_{j+1}}{\frac{h_{j+1}+h_j}{2}} \right] a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n)$$

et

$$d_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{r}{2} \left[\gamma_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{h_{j-1}}{\frac{h_{j-1}+h_j}{2}} \right] a(u_j^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n).$$

Notons d'abord que grâce à l'équation (5.16), et en utilisant la condition sur la maillage (5.2), on peut établir que

$$|u_{j+\frac{1}{2}}^n| \leq \left(\alpha^n + \frac{\sigma}{\sigma+2} \right) \|u_0\|_\infty;$$

le schéma est TVD si :

$$d_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \text{ et } d_{j+\frac{1}{2}}^n + c_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1.$$

Or

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \Rightarrow |\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| \geq \frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \quad \forall j, \quad \forall n$$

et

$$d_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \Rightarrow |\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| \geq \frac{h_j}{h_{j+\frac{1}{2}}} \quad \forall j, \quad \forall n$$

ce qui implique que

$$|\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| \geq \frac{\max(h_j, h_{j+1})}{h_{j+\frac{1}{2}}}.$$

On peut donc écrire

$$\alpha^n = \sup_{(j \in \mathbb{Z})} \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|} \frac{\max(h_j, h_{j+1})}{h_{j+\frac{1}{2}}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{r}{2} \left[\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right] a(u_j^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) + \frac{r}{2} \left[\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{h_j}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right] a(u_{j+1}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) \\ &\leq \frac{r}{2} \left[2 |\gamma_{j+\frac{1}{2}}^n| + \text{sgn}(f') \frac{(h_j - h_{j+1})}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right] M \\ &\leq \left[\alpha^n + \frac{\sigma(\sigma+1)}{\sigma+2} \right] M \leq 1, \end{aligned}$$

donc ce schéma est TVD.

Pour qu'il soit L^∞ stable, il doit vérifier les conditions du principe du maximum :

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j-\frac{1}{2}}^n \leq \frac{r}{2} \left[2\alpha^n + \text{sgn}(f') \left(\frac{h_{j-1}}{h_{j-\frac{1}{2}}} - \frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right) \right] M. \quad (5.18)$$

Or (voir (5.3)),

$$\frac{2}{\sigma+2} \leq \frac{h_{j-1}}{h_{j-\frac{1}{2}}} \leq 2 \frac{\sigma+1}{\sigma+2}$$

et

$$-2 \frac{\sigma+1}{\sigma+2} \leq -\frac{h_{j+1}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \leq -\frac{2}{\sigma+2}.$$

(5.18) s'écrit alors :

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n + d_{j-\frac{1}{2}}^n \leq \frac{r}{2} \left[2\alpha^n + \frac{2\sigma}{\sigma+2} \right] M \leq 1.$$

Le schéma vérifie donc bien le principe du maximum ce qui induit la stabilité L^∞ .

Bibliographie

- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020. MR 2002e :65138
- [Elm99] I. Elmahi, *Schémas volumes finis pour la simulation numérique de problèmes à fronts raides en maillages non structurés adaptatifs*, Ph.D. thesis, Rouen, 1999.
- [GR91] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques & Applications (Paris), vol. 3/4, Ellipses, Paris, 1991.
- [Har83] A. Harten, *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys. **49** (1983), no. 3, 357–393. MR 84g :65115
- [Lev02] Randall J. Leveque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Chapitre 6

Caractéristiques du schéma et conditions aux limites

Dans ce chapitre on explique, dans un premier temps, comment il faut discrétiser le terme source, dans le cas de l'équation de Burgers puis du système de Saint-Venant, et ce, afin de préserver les états d'équilibre.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée au traitement des conditions aux limites. Des résultats numériques obtenus pour des problèmes monophasiques viendront illustrer ces résultats et permettront de valider les techniques utilisées.

6.1 Préservation des états d'équilibre dans le cas non homogène

6.1.1 Dans le cas scalaire de l'équation de Burgers

L'équation de Burgers en dimension un d'espace, dans le cas non homogène, sur un intervalle $]a, b[\in \mathbb{R}$, s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = -u \frac{dz}{dx}, \quad x \in]a, b[\\ u(0, x) = u_0(x) \text{ donné} \\ z(x) \text{ donné.} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Pour ce problème, le schéma SRNHR s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} [f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)] + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{\Delta x}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n \\ u_j^{n+1} = u_j^n - r \left[f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^n) \right] + \Delta t^n Q_j^n, \end{array} \right. \quad (6.2)$$

où

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n = -\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{(z_{j+1} - z_j)}{\Delta x} \quad (6.3)$$

est l'approximation du terme source dans la phase prédicteur, $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n$ désignant un état moyen entre u_j^n et u_{j+1}^n , à définir, et

$$Q_j^n = -\frac{1}{8\Delta x} (u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n) (z_{j+1} - z_{j-1})$$

est la discrétisation du terme source dans la phase correcteur.

On va comparer les résultats obtenus, en utilisant deux choix d'écrire $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n$: la méthode explicite $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}$ ce qui nous allons utiliser pour la démonstration l'état stationnaire et la méthode implicite $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n = u_{j+\frac{1}{2}}^n$ l'approche naturelle.

Définition 6.1.1 On dit qu'une fonction assez régulière $u(x, t)$ est une solution stationnaire du problème (6.1) si

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Soit $u(x, t)$ une fonction assez régulière, solution stationnaire du problème (6.1), alors on a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = -u \frac{dz}{dx} \iff \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) + z(x)) = 0 \iff u(x, t) + z(x) = c$$

où c est une constante.

Définition 6.1.2 On dit qu'un schéma respecte parfaitement le cas stationnaire pour le problème (6.1) si

$$u_j^n + z_j = c \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

Proposition 6.1.3 Sous la condition de discrétisation du terme source dans l'étape correcteur

$$Q_j^n = -\frac{1}{8\Delta x} (u_{j-1}^n + 2u_j^n + u_{j+1}^n) (z_{j+1} - z_{j-1}),$$

le schéma SRNHR respecte parfaitement le cas stationnaire.

Preuve

Dans ce cas, l'étape prédicteur s'écrit sous la forme suivante :

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{4S_{j+\frac{1}{2}}^n} [(u_{j+1}^n)^2 - (u_j^n)^2] - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{4S_{j+\frac{1}{2}}^n} (u_{j+1}^n + u_j^n) (z_{j+1} - z_j),$$

ce qui implique que

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{4S_{j+\frac{1}{2}}^n} (u_{j+1}^n + u_j^n) [(u_{j+1}^n + z_{j+1}) - (u_j^n + z_j)].$$

En utilisant la relation (6.4), l'étape prédicteur devient

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n).$$

$u(x, t)$ est une solution stationnaire si est seulement si $u_j^{n+1} = u_j^n$; l'étape correcteur du schéma SRNHR est donc équivalente à

$$\frac{r}{2} (u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n) (u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) - \Delta t^n Q_j^n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Q_j^n &= \frac{1}{4\Delta x} (u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &= -\frac{1}{4\Delta x} (u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n) (z_{j+1} - z_{j-1}). \end{aligned}$$

Or $u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n)$,
alors

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

ce qui implique que

$$Q_j^n = -\frac{1}{8\Delta x} (u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n) (z_{j+1} - z_{j-1}).$$

■

6.1.2 Dans le cas des équations de Saint-Venant

L'équation de Saint-Venant non homogène, en dimension un d'espace s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(hu)}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(hu^2 + \frac{gh^2}{2})}{\partial x}(x, t) = -gh(x, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x) \\ z(x), h_0(x), u_0(x) \text{ donnés.} \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Pour ce problème, le schéma SRNHR s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} U_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} [F(U_{j+1}^n) - F(U_j^n)] + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} \Delta x \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n \\ U_j^{n+1} = U_j^n - r [F(U_{j+\frac{1}{2}}^n) - F(U_{j-\frac{1}{2}}^n)] + \Delta t_n Q_j^n, \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\text{avec } U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad S_{j+\frac{1}{2}}^n = \max(u - c, u + c) = u + c,$$

$$Q_j^n = -\frac{1}{8}g(h_{j+1} + 2h_j + h_{j-1})[z_{j+1} - z_{j-1}],$$

et où pour $\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n$ on adopte la formule “naturelle” :

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n = -g\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} \right), \quad (6.7)$$

où $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n$ désigne un état moyen entre h_j^n et h_{j+1}^n . Comme dans l'exemple précédent, on va comparer les résultats obtenus, en utilisant deux choix de calcul de $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n$:

$$\text{soit } \tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n = h_{j+\frac{1}{2}}^n, \text{ soit } \tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{h_j^n + h_{j+1}^n}{2}.$$

Soit $U(x, t) = \begin{pmatrix} h(x, t) \\ hu(x, t) \end{pmatrix}$ une fonction suffisamment régulière, solution stationnaire

de (6.5), c'est-à-dire que l'on a $\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 0$.

Si, de plus, on suppose que $u(x, t) = 0$, alors les équations de Saint-Venant non homogènes peuvent s'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(gh^2)}{\partial x}(x, t) = -gh \frac{\partial z}{\partial x}(x),$$

ce qui implique que

$$h(x, t) + z(x) = c.$$

Définition 6.1.4 (voir [BV94] et [BDDV98]) *Un schéma vérifie la C-propriété pour le problème (6.5) si, appliqué à une solution stationnaire de (6.5), satisfait*

$$h_j^n + z_j = c, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 6.1.5 *Sous la condition de discrétisation du terme source, dans l'étape correcteur, sous la forme*

$$Q_j^n = -\frac{1}{8}g(h_{j+1}^n + 2h_j^n + h_{j-1}^n)(z_{j+1} - z_{j-1}),$$

le schéma SRNHR vérifie la C-propriété.

Preuve

$U(x, t)$ est une solution stationnaire de (6.5), avec $u(x, t) = 0$. Le système (6.5) s'écrit alors

$$\frac{\partial F(U(x, t))}{\partial x} = Q(x, t),$$

avec

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} h(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(U(x, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2(x, t) \end{pmatrix} \text{ et } Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(x, t)\frac{\partial z(x)}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

L'étape prédicteur s'écrit alors

$$U_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_j^n + h_{j+1}^n) \\ -\frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{4S_{j+\frac{1}{2}}^n}g[(h_{j+1}^n)^2 - (h_j^n)^2] - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{4S_{j+\frac{1}{2}}^n}g[h_j^n + h_{j+1}^n](z_{j+1} - z_j), \end{pmatrix}$$

ou encore

$$U_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_j^n + h_{j+1}^n) \\ -\frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{4S_{j+\frac{1}{2}}^n}g(h_{j+1}^n + h_j^n)[h_{j+1}^n - h_j^n + z_{j+1} - z_j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_j^n + h_{j+1}^n) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'étape correcteur prend la forme

$$U_j^{n+1} = U_j^n - r[F(U_{j+\frac{1}{2}}^n) - F(U_{j-\frac{1}{2}}^n)] + \Delta t_n Q_j^n.$$

Comme la solution est stationnaire, $U_j^{n+1} = U_j^n$, et donc

$$\begin{cases} r\left([F(U_{j+\frac{1}{2}}^n) - F(U_{j-\frac{1}{2}}^n)]\right)_1 - \Delta t_n (Q_j^n)_1 = 0 \\ r\left([F(U_{j+\frac{1}{2}}^n) - F(U_{j-\frac{1}{2}}^n)]\right)_2 - \Delta t_n (Q_j^n)_2 = 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

où on a noté $(Q_j^n)_k$, la $k^{\text{ième}}$ composante de (Q_j^n) .

La deuxième composante de (6.8) s'écrit alors

$$\frac{r}{2}g[(h_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 - (h_{j-\frac{1}{2}}^n)^2] - \Delta t_n (Q_j^n)_2 = 0,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} (Q_j^n)_2 &= \frac{g}{2\Delta x} [(h_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 - (h_{j-\frac{1}{2}}^n)^2] \\ &= \frac{g}{2\Delta x} (h_{j+\frac{1}{2}}^n + h_{j-\frac{1}{2}}^n) (h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ &= \frac{g}{4\Delta x} (h_{j+\frac{1}{2}}^n + h_{j-\frac{1}{2}}^n) (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) \\ &= -\frac{g}{8\Delta x} (h_{j+1}^n + 2h_j^n + h_{j-1}^n) (z_{j+1} - z_{j-1}), \end{aligned}$$

car, on a $h_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (h_j^n + h_{j+1}^n)$.

Dans la perspective de la résolution numérique de problèmes multidimensionnels non homogènes, un problème connu est celui du bon traitement des conditions aux limites (en particulier des “entrées” et des “sorties”). C’est la raison pour laquelle on explique dans la section suivante, comment on a choisi de les traiter. On a utilisé les invariants de Riemann adaptés à des cas non homogènes.

6.2 Traitement des conditions aux limites

Le traitement des conditions aux limites d’un point de vue numérique et mathématique pour des systèmes hyperboliques est un problème difficile qui fait l’objet d’un grand nombre d’études. On peut citer, par exemple, sur ce sujet, les travaux de C. Hirsch [Hir90], E. Godlewski et P.-A. Raviart [GR96], Kreiss [KB01], F. Pascal et J.-M. Ghidaglia [GP02], D. Serre [Ser99], F. Dubois et P. Le Floch [DF88], D. Serre et M. Gisclon [GS97]. Pour traiter numériquement les conditions aux limites du domaine de calcul, on utilise le principe suivant : il faut aller chercher “à l’extérieur” du domaine autant d’informations que les signes des valeurs propres nous l’imposent.

On se place ici, dans le cas monodimensionnel, et on utilise la formulation classique suivante : on note $[x_0, x_l]$ l’intervalle d’étude, que l’on discrétise en N intervalles ; x_i sont les points de la discrétisation (avec $x_N = x_l$). Enfin, on notera \bar{z} les composantes de z imposées en entrée (en $x = x_0$) et \tilde{z} les composantes de z imposées en sortie (en $x = x_l$).

6.2.1 Cas scalaire linéaire

On considère le système hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (6.9)$$

où a est une constante et x prend des valeurs dans l’intervalle $[x_0, x_l]$.

La solution analytique du système (6.9) est $u(x, t) = u(x - at, 0)$. Cette solution est constante sur les caractéristiques définies par $x - at = C$, C étant constant.

On cherche à appliquer les conditions aux limites pour le système (6.9).

Si $a > 0$, la pente de la caractéristique est positive : on doit donc imposer une condition de bord en entrée $x = x_0$; en revanche, la condition du bord en sortie $x = x_l$ est libre.

Si $a < 0$, la pente de la caractéristique est négative : il faut donc imposer une condition de bord en sortie, alors que celle en entrée est maintenant libre.

6.2.2 Cas 1D vectoriel

Soit $U(x, t)$ un vecteur à n composantes. On considère le système hyperbolique à n équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases} \quad (6.10)$$

où A est une matrice que l'on considère ici à coefficients constants et x prend des valeurs dans l'intervalle $[x_0, x_l]$.

Exemple :

On prend $A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -14 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -7 \end{bmatrix} = R\Lambda L$.

On note U les variables “conservatives” et V les variables “physiques” liées par la relation $V = LU$. Les conditions imposées concernent les variables “physiques” V .

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

La solution du système obtenu en diagonalisant A , est alors donnée par $v_1(x, t) = v_{1,0}(x - \lambda_1 t)$, $v_2(x, t) = v_{2,0}(x - \lambda_2 t)$ et $v_3(x, t) = v_{3,0}(x - \lambda_3 t)$.

Au bord $x = x_0$, comme $\lambda_1 < 0$, on n'a pas de condition à imposer sur v_1 et comme λ_2 et λ_3 sont strictement positives, il faut imposer une condition sur $v_2(x_0, t) = \bar{v}_2$ et $v_3(x_0, t) = \bar{v}_3$:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{x_0}^n = \begin{bmatrix} v_{1,x_0}^n \\ v_{2,x_0}^n \\ v_{3,x_0}^n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_{1,x_1}^n \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -u_{1,x_1}^n - 5u_{2,x_1}^n + 4u_{3,x_1}^n \\ -\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + 2\bar{u}_3 \\ 2\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 4\bar{u}_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\bar{u}_1 - 5\bar{u}_2 + 4\bar{u}_3 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

(6.11) donne un système de trois équations à trois inconnues dont la résolution permet

d'obtenir $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{pmatrix}$ l'inconnue aux limites en entrée.

Dans ce cas linéaire, les invariants de Riemann sont les variables caractéristiques v_{1,x_0}^n , v_{2,x_0}^n , v_{3,x_0}^n .

De (6.11) on obtient donc

$$v_{1,x_0}^n = -\bar{u}_1 - 5\bar{u}_2 + 4\bar{u}_3 = W_1(U). \quad (6.12)$$

Au bord $x = x_l$, comme $\lambda_1 < 0$, il faut une condition sur $v_1(x_N, t) = \tilde{v}_1$ et il n'y a pas de condition à imposer sur v_2 et v_3 .

De même, on a

$$\begin{aligned} \vec{V}_{x_N}^n &= \begin{bmatrix} v_{1,x_N}^n \\ v_{2,x_N}^n \\ v_{3,x_N}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ v_{2,x_{N-1}}^n \\ v_{3,x_{N-1}}^n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tilde{u}_1 - 5\tilde{u}_2 + 4\tilde{u}_3 \\ -u_{1,x_{N-1}}^n - u_{2,x_{N-1}}^n + 2u_{3,x_{N-1}}^n \\ 2u_{1,x_{N-1}}^n + 4u_{2,x_{N-1}}^n - 4u_{3,x_{N-1}}^n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ -\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_3 \\ 2\tilde{u}_1 + 4\tilde{u}_2 - 4\tilde{u}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Comme précédemment, (6.13) donne un système dont la résolution permet d'obtenir la valeur en sortie \tilde{U} .

De (6.13), on obtient

$$-\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_3 = -u_{1,x_{N-1}}^n - u_{2,x_{N-1}}^n + 2u_{3,x_{N-1}}^n \quad (6.14)$$

$$\Rightarrow 2\tilde{u}_1 + 4\tilde{u}_2 - 4\tilde{u}_3 = 2u_{1,x_{N-1}}^n + 4u_{2,x_{N-1}}^n - 4u_{3,x_{N-1}}^n. \quad (6.15)$$

Si on connaît \tilde{u}_1 , la valeur de \tilde{u}_3 sera calculée à partir de la relation (6.15) et inversement.

6.2.3 Résultats numériques

Afin de valider ces techniques de traitement des conditions limites, des applications ont été réalisées. Pour l'exemples présenté dans cette partie, on a utilisé les schémas de Rusanov, de Roe et SRNHR.

Application : On utilise le modèle présenté dans l'exemple précédent, assorti des conditions initiales :

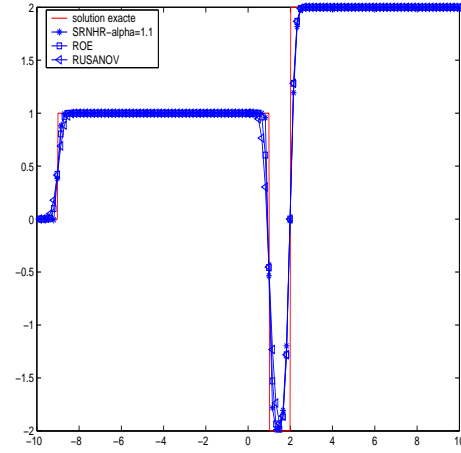
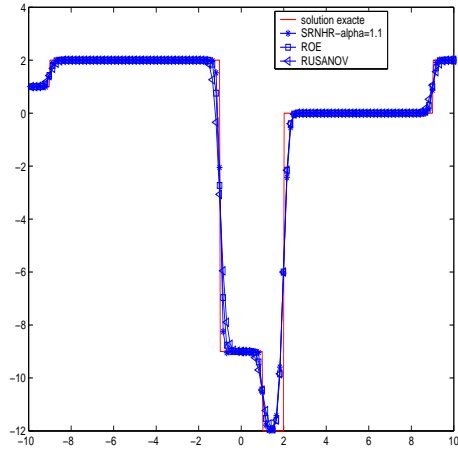
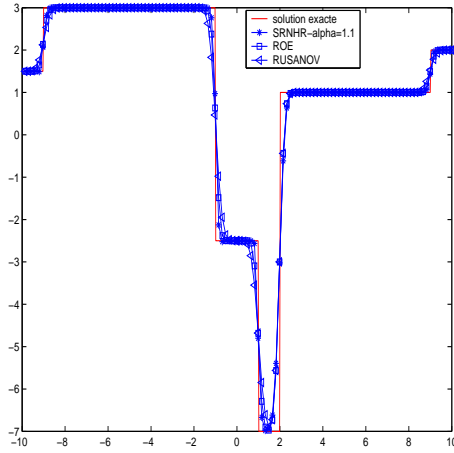
$$U(x, 0) = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 3 \end{cases} \text{ si } x \leq 0, \quad U(x, 0) = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 1 \end{cases} \text{ si } x > 0,$$

et des conditions aux limites :

- en entrée : on impose $\bar{u}_1 = 1$ et $\bar{u}_2 = 0$ et la valeur de \bar{u}_3 est calculée par la relation (6.12).
- en sortie : on impose $\tilde{u}_3 = 2$ et les valeurs de \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 sont calculées par les relations (6.14) et (6.15) respectivement.

On compare les solutions numériques données par les schémas SRNHR (avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1, 1$), de Roe et de Rusanov, à la solution analytique obtenue à $t = 1s$ (voir figures (6.1), (6.2) et (6.3)).

On constate que les conditions de bords sont bien prises en compte : on a bien création de deux états intermédiaires. Cependant, on constate le caractère diffusif du schéma (la discontinuité est diffusée), mais cela est dû au fait que pour les test réalisés ici, on a pris une valeur du paramètre α constante.


 FIG. 6.1 – Système linéaire; u_1 à $t=1s$ FIG. 6.2 – Système linéaire; u_2 à $t=1s$

 FIG. 6.3 – Système linéaire; u_3 à $t=1s$

6.2.4 Conditions aux limites pour un système non linéaire

Problème de Saint-Venant 1D

Le système de Saint-Venant, sans terme source, s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x), \end{cases}$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}.$$

h désigne la hauteur de l'eau et g , la force de gravité.

La matrice jacobienne associée est définie par $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ hg - u^2 & 2u \end{bmatrix}$.

Ses valeurs propres sont $\lambda_1 = u - c$ et $\lambda_2 = u + c$ (avec $c = \sqrt{gh}$) et ses vecteurs propres à droite $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u - c & u + c \end{bmatrix}$.

Les invariants de Riemann pour le système de Saint-Venant sont donnés par

$$\frac{\partial W_k(u)}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial W_k(u)}{\partial x} = 0.$$

Ils s'écrivent ici $W_1(U) = u - 2c$ et $W_2(U) = u + 2c$, et vérifient le système

$$\begin{cases} \frac{\partial(u - 2c)}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial(u - c)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(u + 2c)}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial(u + c)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Les conditions aux limites, imposées sur les variables physiques, sont traitées de la façon suivante :

- En entrée ($x = x_0$) :
 - si $\lambda_1(u(x_1))$ et $\lambda_2(u(x_1))$ sont positives, on dit que l'écoulement est torrentiel. Il faut alors imposer une condition sur les deux invariants de Riemann $W_1(u(x_0))$ et $W_2(u(x_0))$, ce qui est équivalent à imposer les deux variables physiques \bar{u} et \bar{h} . La valeur de la variable d'état en entrée en découle.
 - si $\lambda_1(u(x_1)) < 0$ et $\lambda_2(u(x_1)) > 0$ alors il faut imposer une condition sur $W_2(u(x_0))$. Or, la relation (6.16) donne

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{u} - 2\bar{c} \\ \bar{u} + 2\bar{c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{x_1}^n - 2\sqrt{gh_{x_1}^n} \\ \bar{u} + 2\bar{c} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \bar{u} - 2\bar{c} &= u_{x_1}^n - 2\sqrt{gh_{x_1}^n}. \end{aligned}$$

Ainsi, si \bar{u} est donnée, la valeur de \bar{h} sera calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{u} - u_{x_1}^n)}{2\sqrt{g}} &= (\sqrt{\bar{h}} - \sqrt{h_{x_1}^n}) \\ \Rightarrow \bar{h} &= \left[\sqrt{h_{x_1}^n} + \frac{(\bar{u} - u_{x_1}^n)}{2\sqrt{g}} \right]^2, \end{aligned} \quad (6.17)$$

d'où, pour la variable conservative, $\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{h}\bar{u} \end{bmatrix}$.

- En sortie ($x = x_l$) :
 - si $\lambda_1(u(x_{N-1})) > 0$ et $\lambda_2(u(x_{N-1})) > 0$, l'information vient de l'intérieur du domaine : on n'a donc pas besoin de condition particulière. On dit que l'écoulement est torrentiel.

- si $\lambda_1(u(x_{N-1})) < 0$ et $\lambda_2(u(x_{N-1})) > 0$, il faut une condition sur l'invariant de Riemann $W_1(u(x_l))$ et il n'y a pas de condition sur $W_2(u(x_l))$. L'écoulement est alors dit fluvial.

Or,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{u} - 2\tilde{c} \\ \tilde{u} + 2\tilde{c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{u} - 2\tilde{c} \\ u_{x_{N-1}}^n + 2\sqrt{gh_{x_{N-1}}^n} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{u} + 2\tilde{c} &= u_{x_{N-1}}^n + 2\sqrt{gh_{x_{N-1}}^n}. \end{aligned}$$

Ainsi, si on connaît \tilde{h} , la valeur de \tilde{u} est calculée par la relation suivante :

$$\tilde{u} = u_{x_{N-1}}^n + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_{x_{N-1}}^n} - \sqrt{\tilde{h}}). \quad (6.18)$$

Le système précédent permet d'obtenir \tilde{h} et \tilde{u} donc \tilde{U} , mais ici, cela revient donc à utiliser des conditions de Neumann (méthode équivalente à celle utilisant des mailles miroirs), alors que ce n'était pas le cas pour la valeur en entrée \bar{U} .

Résultats numériques :

L'intervalle $[x_0 = -10, x_l = 10]$ est subdivisé en 100 cellules. On compare, à nouveau, les solutions numériques obtenues avec les schémas SRNHR (avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1, 1$), de Roe et de Rusanov, à $cfl = 0.5$.

On prend des conditions initiales discontinues correspondant à un cas test de rupture de barrage :

$$U(x, 0) = \begin{cases} h_0 = 5m \\ u_0 = 0.2ms^{-1} \end{cases} \quad \text{si } x \leq 0, \quad U(x, 0) = \begin{cases} h_0 = 1m \\ u_0 = 1ms^{-1} \end{cases} \quad \text{si } x > 0,$$

et les conditions aux limites sont :

- en entrée ($x = x_0$), on impose $\bar{u} = 2$ et la valeur de \bar{h} sera calculée par la relation (6.17).
- en sortie ($x = x_l$), on impose $\tilde{h} = 3$ et la valeur de \tilde{u} sera calculée par la relation (6.18).

Les résultats sont donnés figures (6.4) et (6.5). Les conditions limites choisies créent un choc et une détente supplémentaire. On constate que, d'une part, on retrouve bien les valeurs aux bords imposées, et d'autre part, que l'on a bien un choc se propageant de la droite vers la gauche et une onde de détente se propageant de la gauche vers la droite.

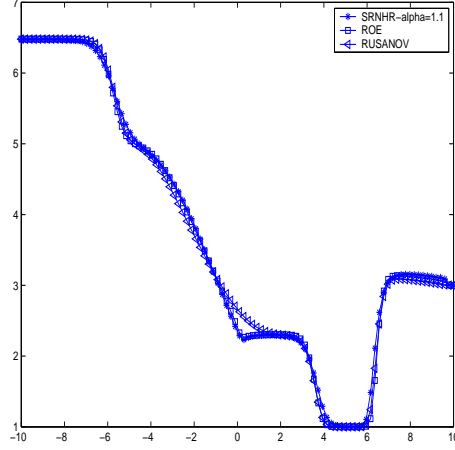


FIG. 6.4 – Hauteur de l'eau à t=0.5 s

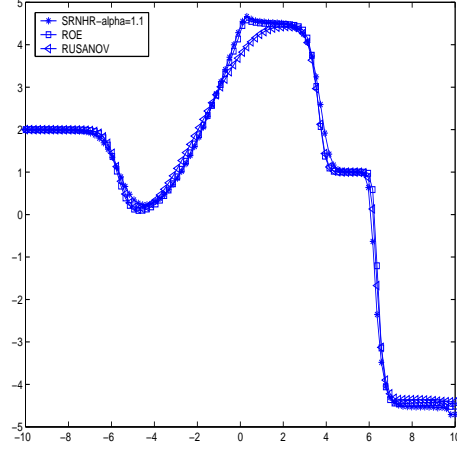


FIG. 6.5 – Vitesse de l'eau à t=0.5s

Equations d'Euler 1D

Les équations d'Euler de la dynamique des gaz constituent un système hyperbolique non linéaire de lois de conservation. On peut les écrire sous la forme conservative suivante (voir chapitre I) :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x), \end{cases} \quad (6.19)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}.$$

Pour fermer le système, on choisit de prendre une loi d'état de gaz parfait polytropique :

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{\rho u^2}{2} \right).$$

La matrice jacobienne associée est définie par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-1}{2}u^3 - uH & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix},$$

ses valeurs propres sont $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3(u) = u + c$, où $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$,

et ses vecteurs propres à droite sont donnés par $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{u^2}{2} & H + uc \end{bmatrix}$,

où $H = \frac{1}{\rho}(E + p)$ désigne l'enthalpie.

Enfin, les invariants de Riemann sont donnés par

$W_1(u) = u - \frac{2c}{\gamma - 1}$, $W_2(u) = \frac{p}{\rho^\gamma}$ et $W_3(u) = u + \frac{2c}{\gamma - 1}$ (voir par exemple, C. Hirsch [Hir90]).

La relation liant les éléments propres de A aux invariants de Riemann est donnée par

$$\frac{\partial w_k(u)}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial w_k(u)}{\partial x} = 0. \quad (6.20)$$

Le traitement des conditions limites se fait de la façon suivante :

- En entrée ($x = x_0$) : si $\lambda_1(u(x_1)) < 0$, $\lambda_2(u(x_1)) > 0$ et $\lambda_3(u(x_1)) > 0$, alors il faut imposer une condition sur les deux invariants de Riemann $W_2(u(x_0))$ et $W_3(u(x_0))$: la relation précédente (6.20) donne

$$\begin{bmatrix} \bar{u} - \frac{2\bar{c}}{\gamma-1} \\ \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \\ \bar{u} + \frac{2\bar{c}}{\gamma-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_1}^n - 2\frac{\sqrt{\gamma p_{x_1}^n}}{\rho_{x_1}^n} \\ \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \\ \bar{u} + \frac{2\bar{c}}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} - \frac{2\bar{c}}{\gamma-1} = u_{x_1}^n - 2\frac{\sqrt{\gamma p_{x_1}^n}}{\rho_{x_1}^n}. \quad (6.21)$$

A partir de cette relation, si on connaît les valeurs de \bar{u} et de $\bar{\rho}$, on peut alors calculer la valeur de \bar{p} et donc de \bar{E} par :

$$\begin{cases} \bar{p} = \frac{\bar{\rho}}{\gamma} \left[\sqrt{\frac{\gamma p_{x_1}^n}{\rho_{x_1}^n}} + \frac{\gamma-1}{2}(\bar{u} - u_{x_1}^n) \right]^2 \\ \bar{E} = \frac{\bar{p}}{\gamma-1} + \frac{\bar{\rho}\bar{u}^2}{2}, \end{cases} \quad (6.22)$$

ce qui donne $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{E} \end{pmatrix}$.

- En sortie ($x = x_l$) : si $\lambda_1(u(x_{N-1})) < 0$, $\lambda_2(u(x_{N-1})) > 0$ et $\lambda_3(u(x_{N-1})) > 0$, il faut imposer une condition sur le premier invariant de Riemann $W_1(u(x_l))$.

Par (6.20), on a

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} - \frac{2\tilde{c}}{\gamma - 1} \\ \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^\gamma} \\ \tilde{u} + \frac{2\tilde{c}}{\gamma - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u} - \frac{2\tilde{c}}{\gamma - 1} \\ \frac{p_{x_{N-1}}^n}{(\rho_{x_{N-1}}^n)^\gamma} \\ u_{x_{N-1}}^n + 2\sqrt{\frac{\gamma p_{x_{N-1}}^n}{\rho_{x_{N-1}}^n}} \end{bmatrix}.$$

\tilde{p} étant donné, on en déduit successivement

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{(\rho_{x_{N-1}}^n)^\gamma \tilde{p}}{p_{x_{N-1}}^n} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

puis

$$\tilde{u} = u_{x_{N-1}}^n + \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma p_{x_{N-1}}^n}{\rho_{x_{N-1}}^n}}$$

et enfin

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{p}}{\gamma - 1} + \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{2},$$

et donc

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} \tilde{u} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Application numérique :

On effectue la simulation numérique de l'équation d'Euler (6.19) sur l'intervalle $[-10, 10]$, avec des conditions initiales constantes

$$\begin{cases} \rho_0 = 12, \\ u_0 = 5, \\ p_0 = 100\,000, \end{cases}$$

et les conditions limites :

- en entrée ($x = x_0$), on impose $\bar{u} = 14$ et $\bar{p} = 13$; la valeur de \bar{p} est calculée par la relation (6.22).
- en sortie ($x = x_l$), on impose $\tilde{p} = 120\,000$; les valeurs de \tilde{u} et de $\tilde{\rho}$ sont calculées par la relation (6.23).

De nouveau, on compare les résultats numériques obtenus avec les schémas SRNHR (avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1, 1$), de Roe et de Rusanov, à $cfl = 0.5$. Le domaine $[-10, 10]$ est subdivisé en 100 cellules.

Les résultats numériques sont donnés figures (6.6), (6.7), (6.8) et (6.9).

Ces figures montrent que les conditions aux limites créent un choc se propageant de la droite vers la gauche et une onde de détente se propageant de la gauche vers la droite.

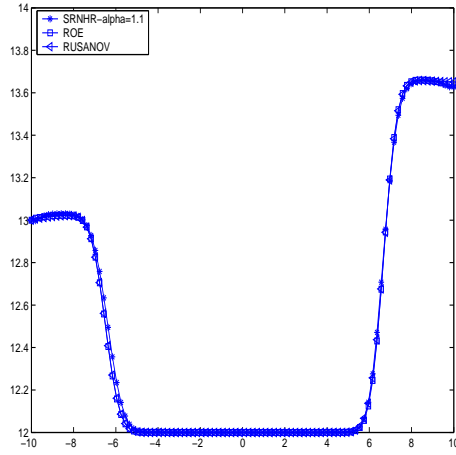


FIG. 6.6 – Densité du fluide à $t=0.03s$

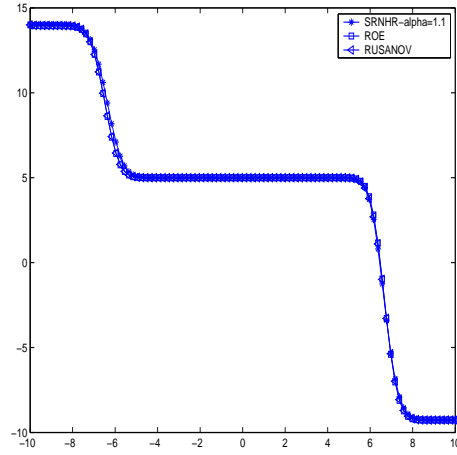


FIG. 6.7 – Vitesse du fluide à $t=0.03s$

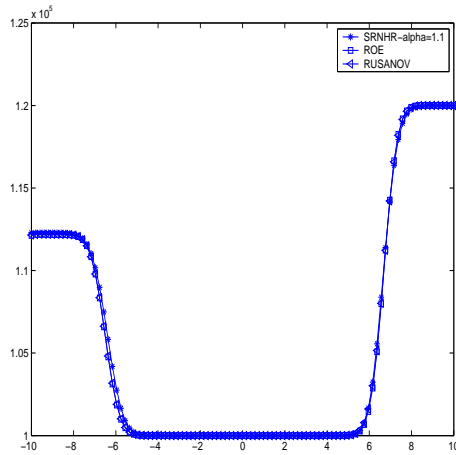


FIG. 6.8 – Pression du fluide à $t=0.03s$

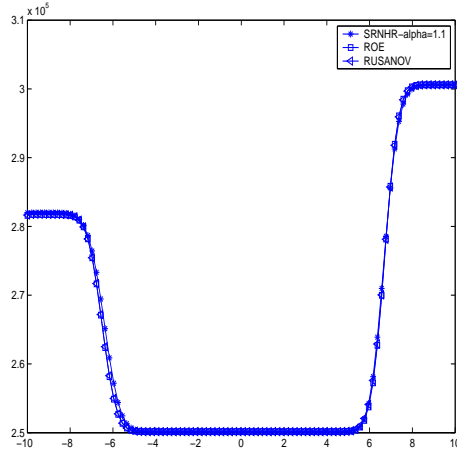


FIG. 6.9 – Energie du fluide à $t=0.03s$

Bibliographie

- [BDDV98] A. Bermúdez, A. Dervieux, J.-A. Desideri, and M. E Vázquez, *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **155** (1998), no. 1-2, 49–72.
- [BV94] A. Bermudez and M.E Vazquez, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Comput. & Fluids **23** (1994), no. 8, 1049–1071.
- [DF88] F. Dubois and P. Le Floch, *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differential Equations **71** (1988), no. 1, 93–122.
- [GP02] J.-M. Ghidaglia and F. Pascal, *Flux boundary conditions for hyperbolic systems of conservations laws in the finite volume framework*, Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002), Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille, 2002, pp. 327–334 (electronic).
- [GR96] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [GS97] M. Gisclon and D. Serre, *Conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique fournies par le schéma de Godunov*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **31** (1997), no. 3, 359–380.
- [Hir90] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows. volume2 : Computational methods for inviscid and viscous flows*, Wiley Series in Numerical Methods in Engineering. Wiley-Interscience Publication, 1990.
- [KB01] H.-O. Kreiss and H.U. Busenhardt, *Time-dependent partial differential equations and their numerical solution*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [Ser99] D. Serre, *Systems of conservation laws. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.

Chapitre 7

Expériences numériques en monophasique

Dans cette partie, nous présentons des résultats numériques obtenus avec le schéma SRNHR.

Dans le cas monodimensionnel, on présente, dans un premier temps, les résultats obtenus par ce schéma sur des problèmes scalaires et linéaires (équation d'advection), ensuite sur des problèmes non linéaires (équation de Burgers), puis sur des systèmes d'équations (Saint-Venant et Euler).

On a ensuite testé ce schéma sur des problèmes non homogènes comme ceux d'advection et de Burgers avec terme source ainsi que celui de Saint-Venant avec topographie variable.

Dans le cas bidimensionnel, on a testé ce schéma sur des problèmes hyperboliques homogènes comme ceux de Saint-Venant et d'Euler, puis sur des problèmes non homogènes (Saint-Venant avec topographie variable).

D'autre part, afin de connaître "l'ordre numérique" du schéma, nous avons représenté des courbes d'erreurs qui permettent d'effectuer des comparaisons avec d'autres schémas numériques ayant fait leurs preuves (schéma décentré, de Rusanov, de Roe, de Vasquez), ceci afin de justifier les résultats théoriques obtenus au chapitre (5).

Avant de donner les résultats numériques, nous rappelons brièvement quelques résultats théoriques concernant la convergence des schémas aux volumes finis.

Pour des systèmes hyperboliques de la forme

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(F(x, t, u)) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

des résultats de convergence et d'estimations d'erreurs ont été démontrés par Lefloch dans [CCF94], [CCF95], Vila [Vil94] pour les cas où $F(x, t, u) = F(u)$. Gallouët et ces coauteurs ([EGH00], [EGGH98]) ont également obtenu des résultats dans le cas $F(x, t, u) = vf(u)$, en fixant certaines conditions de régularité sur le champ de vitesse $(v(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \times$

$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d$), $\text{div}(v) = 0$), ainsi que sur la condition initiale ($u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$) et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Sur un maillage triangulaire ($d = 2$), on sait que l'erreur est en $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{4}})$, et que pour un maillage rectangulaire, elle est en $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$, h étant la "taille" du maillage [EGH00]. Dans le même contexte, B. Després [Des03] a montré que l'erreur du schéma VF est d'ordre $h^{\frac{1}{2}}$, dans le cas de l'équation d'advection, sur un maillage triangulaire. D. Bouche, J.M. Ghidaglia et F. Pascal [BGP04] ont montré que l'erreur, pour la même équation, peut être d'ordre h , moyennant certaines conditions de régularité sur la condition initiale.

7.1 Problème linéaire scalaire

7.1.1 Problème linéaire homogène :

On considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in]0, 20[. \end{cases} \quad (7.1)$$

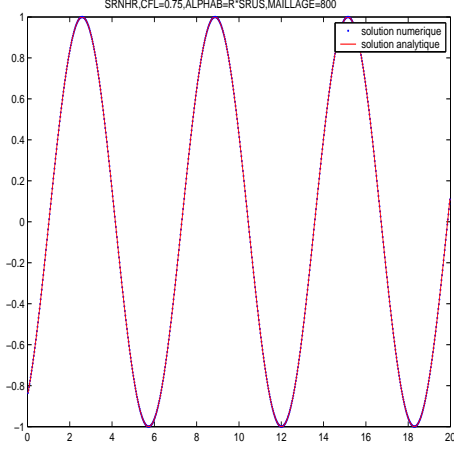
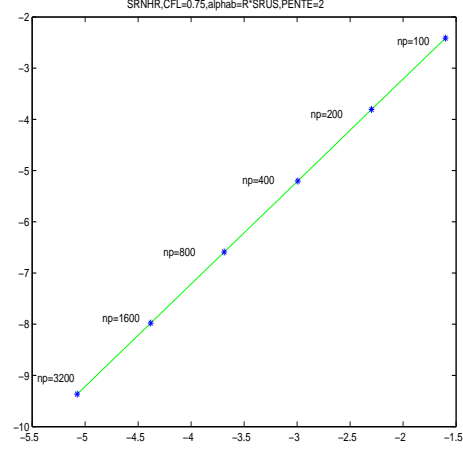
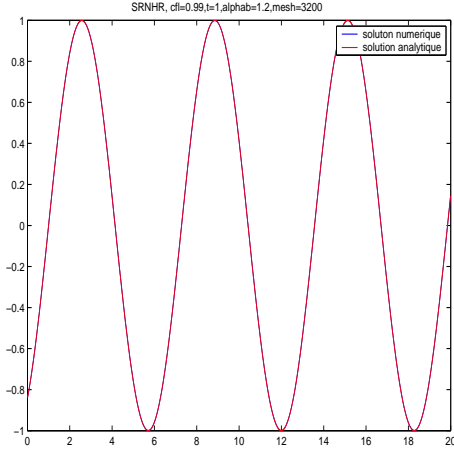
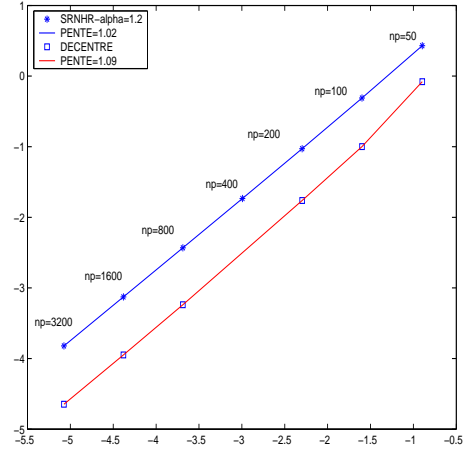
Cette équation représente la propagation d'une onde dans la direction x avec une vitesse égale à un.

Cas test 1 : On prend une condition initiale continue $u_0(x) = \sin(x)$ et une condition aux limites périodique.

On rappelle que le paramètre de contrôle $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ joue un rôle important, comme il l'a été expliqué au paragraphe (3.1.1).

Si on prend $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = r \cdot S_{j+\frac{1}{2}}^n$ dans le schéma SRNHR, on remarque que ce schéma devient celui de Lax-Wendroff qui est d'ordre 2, comme on peut le constater figures (7.1) et (7.2), (n_p désigne le nombre de points de discrétisations choisi pour chaque maillage).

Si, maintenant, on choisit de prendre $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant = 1.2, on remarque que, avec un maillage très fin (3200 points), la solution analytique et la solution numérique se superposent exactement (figure (7.3)). Quand on compare ces résultats à ceux obtenus par un schéma décentré, on remarque que ces deux schémas sont du même ordre (figure (7.4)).


 FIG. 7.1 – Cas homogène, schéma SRNHR ($\alpha^n_{j+\frac{1}{2}} = r \cdot S^n_{j+\frac{1}{2}}$), CI : Sinus

 FIG. 7.2 – Courbe d'erreur, schéma SRNHR ($\alpha^n_{j+\frac{1}{2}} = r \cdot S^n_{j+\frac{1}{2}}$).

 FIG. 7.3 – Cas homogène, schéma SRNHR ($\alpha^n_{j+\frac{1}{2}} = \alpha = 1.2$), CI : Sinus

 FIG. 7.4 – Courbe d'erreur, schémas SRNHR ($\alpha^n_{j+\frac{1}{2}} = \alpha = 1.2$) et décentré.

Cas test 2 : On choisit maintenant de prendre une condition initiale discontinue

$$u_0(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

On va comparer les différents résultats obtenus en faisant varier le paramètre de contrôle $\alpha^n_{j+\frac{1}{2}}$. Pour cela, on a effectué les calculs avec $\alpha^n_{j+\frac{1}{2}}$ constant ($= 1.1$), puis avec celui déterminé au paragraphe (4.3.3) :

$$\alpha^n_{j+\frac{1}{2}} = \nu \eta^n_j + (1 - \eta^n_j), \quad (7.2)$$

où $\nu = ar$ ($a = 1$ dans l'équation (7.1)) et $\eta^n_j = \eta(\theta^n_j)$ est, dans un premier temps, le limiteur de Superbee ([Lev02], [Hir90]) défini par

$$\eta(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$$

avec (puisque, ici, $a = 1 > 0$)

$$\theta_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n},$$

puis celui de Van Leer [Lev02] :

$$\eta(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}.$$

Remarque : La relation (7.2) permet de faire varier $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ entre ν et 1 :

- si $\eta_j^n = 0$, alors $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1$ et on obtient le schéma décentré.
- si $\eta_j^n = 1$, alors $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = \nu$ et on obtient le schéma de Lax-Wendroff.

On compare les résultats obtenus avec le schéma SRNHR et le schéma décentré.

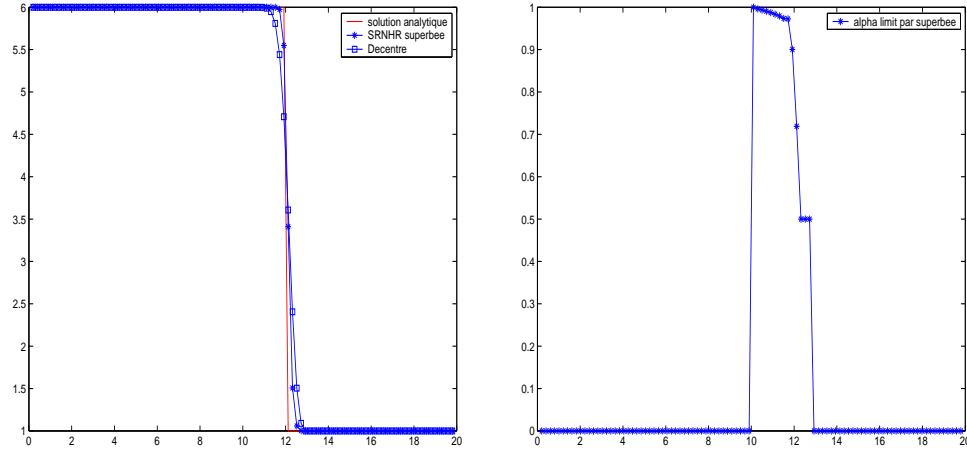
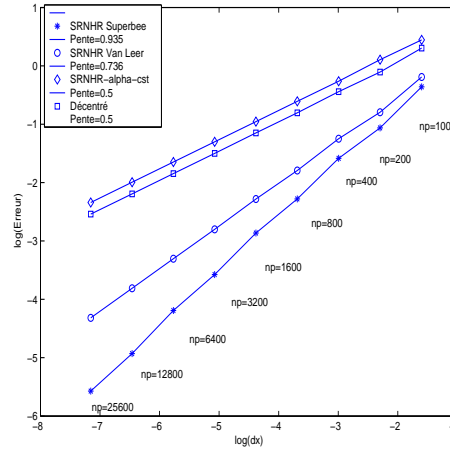
La simulation numérique a été effectuée sur un maillage de 800 points. Le pas de temps est fixé de façon à ce que la condition de stabilité (4.12) soit satisfaite. Les calculs sont réalisés à $cfl = 0.75$ (on rappelle que la condition de stabilité implique ici que $cfl \leq \frac{1}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}$, $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 1$).

La figure, obtenue à $t = 2$, (7.5), représente les solutions obtenues avec les deux schémas ainsi que les variations du paramètre $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee. En raffinant le maillage, on constate que l'ordre numérique obtenu est proche de 1 lorsque l'on prend le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee, alors qu'il ne vaut que 0.5, pour le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant, comme pour le schéma décentré (figure (7.6)).

On peut également remarquer que c'est le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee qui donne l'ordre numérique le plus élevé (meilleur qu'avec le limiteur de Van Leer). En revanche, quand on fixe $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1.1$, les résultats sont comparables à ceux obtenus avec le schéma décentré ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1$).

D'autre part, c'est également le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee qui donne l'erreur numérique la plus faible, pour une taille de maillage donnée, et c'est le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1.1$ qui donne l'erreur numérique la plus importante (le schéma est plus diffusif).

Néanmoins, on constate que ce schéma est dans tous les cas d'ordre 1 (si $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ est constant) ; il est bien connu que les schémas les plus précis sont les schémas décentrés. Or la théorie nous indique que $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 1$, et les résultats numériques obtenus nous montrent bien qu'il ne suffit pas de prendre $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n > 1$, constant. Rappelons toutefois que ce schéma trouve surtout son intérêt dans les cas non homogènes.


 FIG. 7.5 – Cas linéaire homogène, schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee).

 FIG. 7.6 – Courbe d'erreur : schémas SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité et $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1.1$) décentré.

7.1.2 Problème linéaire non homogène :

On considère maintenant l'équation d'advection avec terme source

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -u \frac{dz}{dx} \\ u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10 \end{cases} \\ z(x) = \begin{cases} z_l & \text{si } x \leq 10 \\ z_r & \text{si } x > 10, \end{cases} \end{cases} \quad (7.3)$$

Cas test 3 : On choisit ici, $z_l = 0$ et $z_r = 0.1$. On s'intéresse à la simulation numérique de l'équation (7.3) en utilisant le schéma SRNHR (avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee) et celui de Vazquez (voir 2.2.4).

Les calculs sont réalisés d'abord sur un maillage à 100 points à $cfl = 0.75$. La solution est donnée à $t = 2s$.

On constate que les solutions obtenues avec les schémas SRNHR et de Vazquez coïncident avec la solution analytique et que le schéma SRNHR est très efficace, notamment au niveau de la discontinuité de contact (figure (7.7)).

Plus précisément, la discontinuité de contact stationnaire est bien prise en compte avec les deux schémas. Cependant, on note que le schéma SRNHR a un meilleur comportement au niveau du choc, que le schéma de Vazquez, et cela se constate au travers des courbes de convergence.

Ces figures montrent également les variations du paramètre.

En raffinant le maillage, on note que l'ordre numérique obtenu est similaire à celui obtenu au cas test 2 (problème homogène) (voir figures 7.6 et 7.8).

La figure (7.8) montre que le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee est d'ordre 0.9 alors que celui de Vazquez (décentré classique) est d'ordre 0.5.

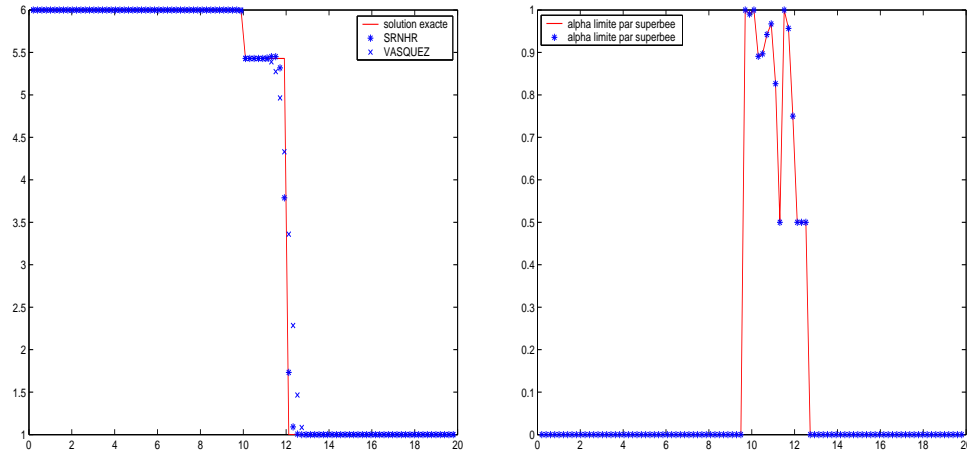


FIG. 7.7 – Cas non homogène, schémas SRNHR limité par Superbee et de Vazquez. Maillage à 100 points.

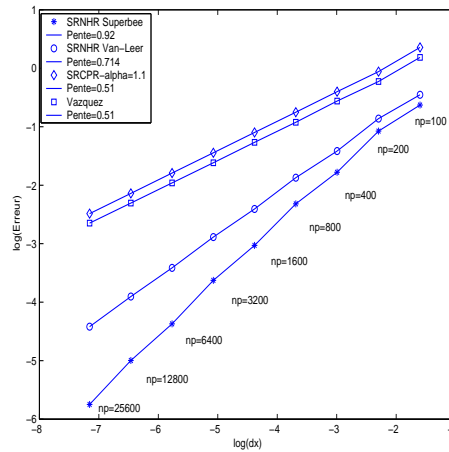


FIG. 7.8 – Cas non homogène ; courbe d'erreur, schémas SRNHR et de Vazquez.

Cas test 3bis : On prend maintenant, $z_l = 0$ et $z_r = 1$.

On constate, sur cet exemple, que le schéma de Vazquez ne permet pas de capturer l'état intermédiaire ni la discontinuité de contact qui se propage, alors que le schéma SRNHR le fait bien (figure(7.9)).

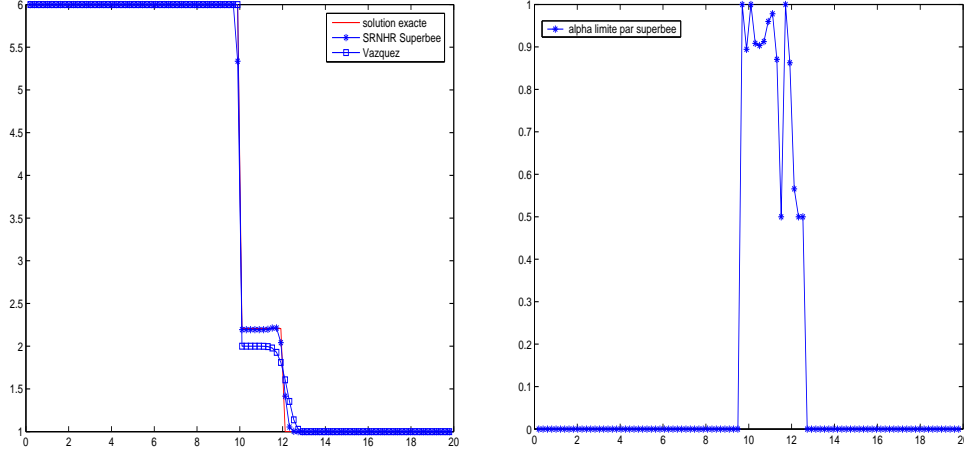


FIG. 7.9 – Cas non homogène, schéma SRNHR limité par Superbee. Maillage à 100 points.

7.2 Problème de Burgers

L'équation de Burgers représente le cas limite d'un problème scalaire parabolique, modélisant un écoulement de manière simplifiée ; elle s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.4)$$

Quand le paramètre ν tend vers zéro, l'équation (7.4) peut se mettre sous la forme conservative suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0. \quad (7.5)$$

Cette équation est très intéressante dans la mesure où elle contient la plupart des difficultés liées aux problèmes hyperboliques non linéaires.

7.2.1 Algorithme de calcul du paramètre de contrôle dans le cas du problème de Burgers homogène

On présente ici l'algorithme de calcul du paramètre de contrôle :

```

A l'étape  $n$ ,
Pour chaque cellule du maillage
On calcule la vitesse de Rusanov locale
 $S_{k+\frac{1}{2}}^n = \max(|f'(U_k^n)|, |f'(U_{k+1}^n)|)$ 
 $\nu_{k+\frac{1}{2}}^n = r S_{k+\frac{1}{2}}^n$ 
Si ( $U_{k+1}^n = U_k^n$ ) Alors
    |  $\theta = 0$ 
    |  $\alpha_{k+\frac{1}{2}}^n = 0$ 
Sinon
    | Si ( $f'(U_{k+\frac{1}{2}}^n) > 0$ ) Alors
    | |  $\theta = \frac{(U_k^n - U_{k-1}^n)}{(U_{k+1}^n - U_k^n)}$ 
    | | Sinon
    | |  $\theta = \frac{U_{k+2}^n - U_{k+1}^n}{U_{k+1}^n - U_k^n}$ 
    | | Fin Si
    |  $\theta_k = \text{Limiteur}(\theta)$ 
    |  $\alpha_{k+\frac{1}{2}}^n = \nu_{k+\frac{1}{2}}^n \theta_k + (1 - \theta_k) \frac{S_{k+\frac{1}{2}}^n}{\min(|f'(U_k^n)|, |f'(U_{k+1}^n)|)}$ 
Fin Si
FinPour
    
```

Dans les cas présentés ici, les limiteurs utilisés sont

– Superbee : $\text{Limiteur}(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$

ou bien

– Van-Leer : $\text{Limiteur}(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}$.

7.2.2 Problème de Burgers homogène

Cas test 4 : Etude d'un cas avec choc.

On considère l'équation (7.5) assortie de la condition initiale suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g = 2 & \text{si } x \leq 0, \\ u_d = 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}, \quad x \in]-10, 10[. \quad (7.6)$$

Dans ce cas, on sait que la solution contient une onde de choc se propageant vers la droite avec une vitesse égale à $\frac{u_g + u_d}{2} = \frac{3}{2}$.

On réalise la simulation numérique de ce problème, en utilisant à nouveau, les schémas SRNHR (avec les trois valeurs du paramètre de contrôle décrites précédemment) et le schéma décentré.

Les calculs ont été réalisés sur un maillage de 200 points, à $cfl = 0,75$; les résultats sont donnés à $t = 2$. On remarque que la solution numérique coïncide avec la solution analytique (figure 7.10).

Après raffinement du maillage, on constate que les schémas SRNHR et décentré sont d'ordre

similaire (environ 1), mais on obtient une erreur numérique plus faible quand on utilise le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee (figure 7.11).

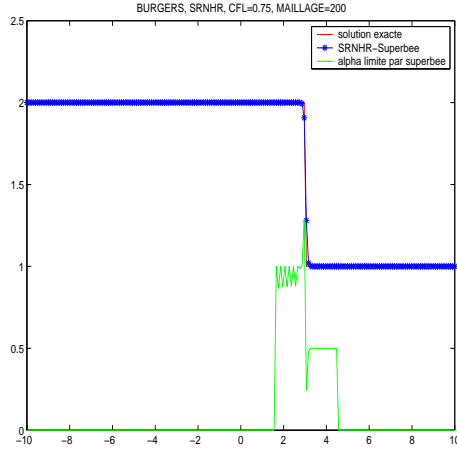


FIG. 7.10 – Burgers homogène, schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee).

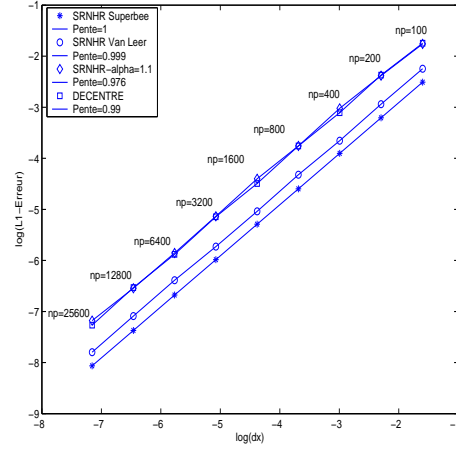


FIG. 7.11 – Courbe d'erreur ; schémas SRNHR et décentré.

Cas test 5 : Etude d'un cas contenant une onde de détente.

On prend maintenant comme condition initiale, celle donnant une solution contenant une onde de détente :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 2 & \text{si } x > 0, \end{cases}, \quad x \in]-10, 10[. \quad (7.7)$$

On effectue les mêmes calculs que dans le cas test précédent. Après raffinement de maillage, on remarque que, à nouveau, les schéma SRNHR et décentré sont du même ordre (0.77), mais l'erreur numérique est moins importante pour le schéma SRNHR que pour celui décentré (figures (7.12) et (7.13)).

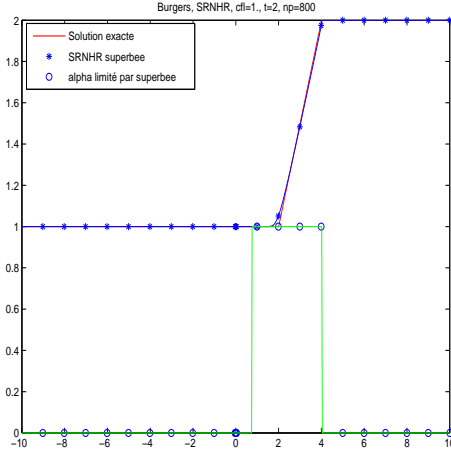


FIG. 7.12 – Burgers homogène, schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee)

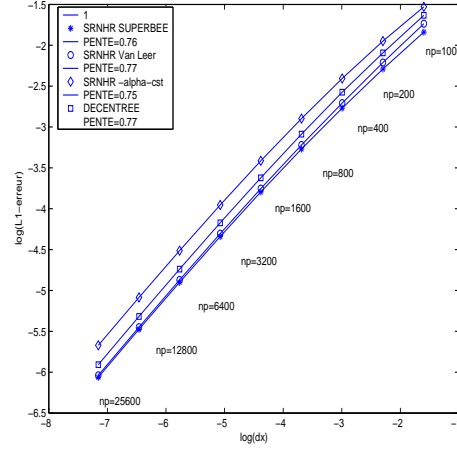


FIG. 7.13 – Courbe d'erreur ; schémas SRNHR et décentré.

Cas test 6 :

Enfin, on prend comme condition initiale, celle donnant une solution contenant une onde de raréfaction passant par le point $x = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g = -1 & \text{si } x \leq 0, \\ u_d = 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}, \quad x \in [-10, 10]. \quad (7.8)$$

La solution donnée par le schéma de Roe est un choc stationnaire car la fonction du flux numérique du schéma de Roe est basée sur la linéarisation du problème de Riemann local. La solution de problème de Riemann linéaire coïncide avec la solution exacte, lorsque celle-ci ne contient qu'une onde de choc ou une discontinuité de contact. Dans ce cas la relation de saut est satisfaite pour u_l et u_r , ainsi on a

$$f(u_r) - f(u_l) = s(u_r - u_l).$$

Autrement dit, l'onde de raréfaction n'apparaît pas dans le cas linéaire, ce qui implique que dans le schéma de Roe il y a violation de la condition d'entropie au niveau des points soniques, c'est-à-dire les points tels que $f'(u_l) < 0 < f'(u_r)$.

Par exemple, dans ce cas test, la solution physique est une onde de raréfaction passant par le point $x = 0$, puisque $f(1) = f(-1)$.

En effet, le flux de Roe s'écrit

$$\Phi_{j+\frac{1}{2}}^{\text{Roe}} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - |a_{j+\frac{1}{2}}|(u_{j+1} - u_j),$$

avec $a_{j+\frac{1}{2}} = \frac{f_{j+1} - f_j}{u_{j+1} - u_j} = 0$ ici. Donc $\Phi_{j+\frac{1}{2}}^{\text{Roe}} = f_{j+1} = f_j$, ce qui implique que $\Phi_{j+\frac{1}{2}}^{\text{Roe}} - \Phi_{j-\frac{1}{2}}^{\text{Roe}} = 0$ et donc que $u_j^{n+1} = u_j^n$, quelque soit le point considéré.

Le schéma de Roe remplace alors l'onde de raréfaction par un choc stationnaire comme on peut le voir figure (7.14).

En revanche, le flux du schéma SRNHR est exprimé en fonction du vrai flux physique et on n'a pas recours à la linéarisation du problème de Riemann (les caractéristiques du système non linéaire sont préservées). C'est la raison pour laquelle on ne rencontre pas de problème d'entropie au niveau des points soniques, comme on peut le constater à la figure (7.14). La figure (7.15) montre les variations du paramètre.

Le maillage contient 100 points, et la solution est montrée à $t = 2s$.

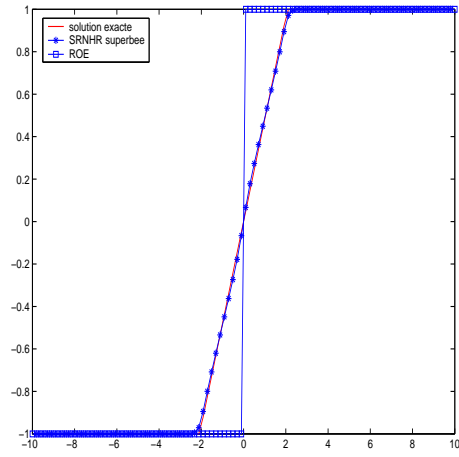


FIG. 7.14 – Burgers homogène, schémas SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee) et de Roe.

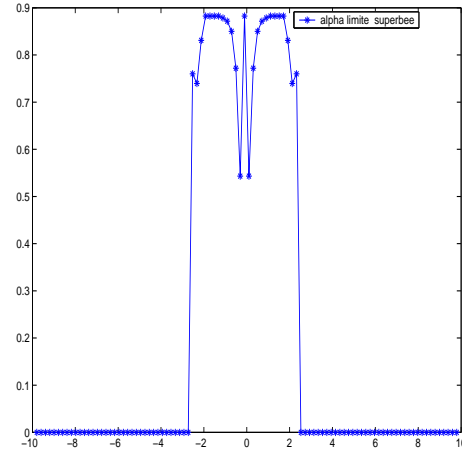


FIG. 7.15 – Variation du paramètre $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$.

7.2.3 Problème de Burgers non homogène

On considère maintenant l'équation de Burgers avec terme source

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = -u \frac{dz}{dx}, & x \in]-10, 10[\\ u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (7.9)$$

On compare les résultats numériques donnés par le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee et Van Leer, $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant et par le schéma de Vazquez, à la solution exacte. Les calculs ont été réalisés à $CFL = 0,75$, sur un maillage comportant 100 points et les résultats sont donnés à $t = 2s$.

Après avoir effectué des raffinements de maillages successifs, on remarque que les schémas SRNHR et de Vazquez sont du même ordre (égal à 1), mais que l'erreur numérique obtenue avec le schéma SRNHR est moins importante que celle obtenue avec le schéma de Vazquez (figures (7.16) et (7.17)). D'autre part, on constate également que le fait de limiter le paramètre du schéma fait gagner en précision et en efficacité.

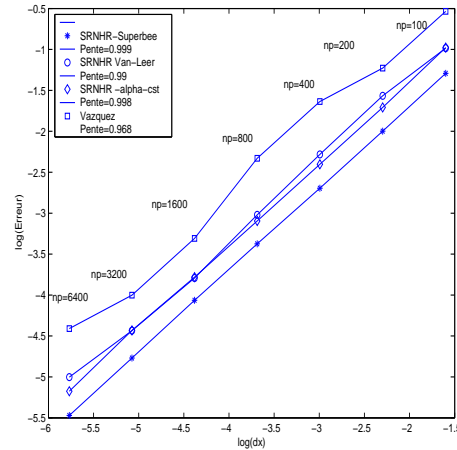
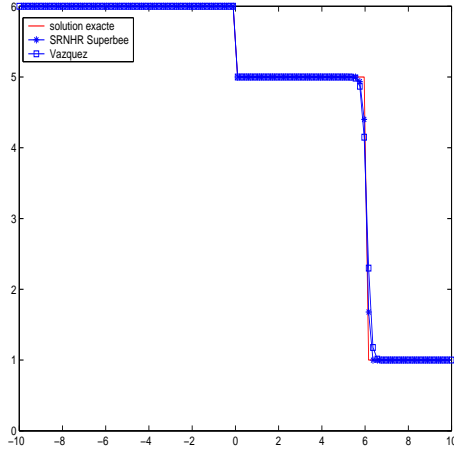


FIG. 7.16 – Burgers non homogène, schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité par Superbee) et de Vazquez

FIG. 7.17 – Courbe d'erreur ; schémas SRNHR et de Vazquez.

7.3 Problème de Saint-Venant 1D

7.3.1 Problème de Saint-Venant homogène

On rappelle ici les équations de Saint-Venant, dans le cas où le terme source est nul

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(hu)}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(hu^2 + \frac{gh^2}{2})}{\partial x}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

avec pour conditions initiales :

$$h_0(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 6 \\ 2 & \text{si } x > 6. \end{cases}$$

et

$$u_0(x) = 0, \quad \forall x.$$

7.3.2 Algorithme de calcul du paramètre de contrôle dans le cas du problème de Saint-Venant homogène

Dans le cas de l'équation de Saint-Venant, les invariants de Riemann et les valeurs propres de la matrice jacobienne vérifient la relation

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

avec $W_1 = u - 2c$, $W_2 = u + 2c$, $\lambda_1 = u - c$ et $\lambda_2 = u + c$.

L'algorithme du calcul s'écrit alors

A l'étape n , pour chaque cellule du maillage,
on calcule la vitesse de Rusanov locale :

$$S_{j+\frac{1}{2}}^n = \max_p \left(\max \left(|\lambda_{p,j}^n|, |\lambda_{p,j+1}^n| \right) \right)$$

Si ($W_{k_{j+1}} = W_{k_j}$) **Alors**

$$\quad | \quad \theta_{W_k} = 0$$

Sinon

Calcul de la vitesse à l'état moyen :

$$\tilde{c}_{j+\frac{1}{2}} = \sqrt{g \frac{h_j + h_{j+1}}{2}},$$

$$\tilde{V}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{(u_j + u_{j+1})}{2},$$

$$\tilde{\lambda}_{k_{j+\frac{1}{2}}} = \tilde{V}_{j+\frac{1}{2}} + (-1)^k \tilde{c}_{j+\frac{1}{2}}$$

Si ($\lambda_{k_{j+\frac{1}{2}}} > 0$) **Alors**

$$\quad | \quad \theta_{W_k} = \frac{W_{k_j} - W_{k_{j-1}}}{W_{k_{j+1}} - W_{k_j}}$$

Sinon

$$\quad | \quad \theta_{W_k} = \frac{W_{k_{j+2}} - W_{k_{j+1}}}{W_{k_{j+1}} - W_{k_j}}$$

Fin Si

Fin Si

$$s_{j+\frac{1}{2}} = \min(|\tilde{\lambda}_{1_{j+\frac{1}{2}}}|, |\tilde{\lambda}_{2_{j+\frac{1}{2}}}|)$$

$$(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_1 = \frac{S_{j+\frac{1}{2}}^n}{s_{j+\frac{1}{2}}}, (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_2 = r_j^n S_{j+\frac{1}{2}}^n$$

Si ($s_{j+\frac{1}{2}} < \varepsilon$) **Alors**

$$\quad | \quad (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_1 = 1$$

Fin Si

Si ($\theta_{W_1} < 0$ or $\theta_{W_2} < 0$) **Alors**

$$\quad | \quad \Psi = 0$$

Sinon

$$\quad | \quad \Psi = \text{Limiteur}(\theta_{W_1}, \theta_{W_2})$$

Fin Si

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_1 (1 - \Psi) + \Psi (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n)_2.$$

Remarques :

- Dans les cas présentés ici, les limiteurs utilisés sont Min-Mod, Van-Leer et Superbee.
- Le paramètre ε permet d'éviter le cas de résonance rencontré lorsque le nombre de Froude est égale à 1 (et donc $s_{j+\frac{1}{2}} = 0$). Ce cas critique n'est pas traité dans ce document.

7.3.3 Cas test de rupture de barrage sur fond mouillé

On considère un barrage de longueur 12 m avec des conditions initiales décrites ci-dessus (7.10). La solution de ce problème contient deux types d'ondes : une onde de choc et une onde de détente.

On compare les résultats numériques donnés par le schéma SRNHR avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ limité entre 0 et 1 et par le schéma de Roe à la solution exacte donnée au chapitre 1 (figures (7.18) et

(7.19). Les figures (7.20), (7.21), (7.22), (7.23), (7.24) et (7.25) montrent respectivement la variation de $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$, $\frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n}$, $\frac{1}{s_{j+\frac{1}{2}}}$, le premier puis le second invariant de Riemann, θ_{W_1} et

θ_{W_2} (définis dans l'algorithme ci-dessus).

Après raffinement de maillage on constate que le schéma SRNHR et le schéma de Roe ont le même ordre de convergence, alors que l'ordre du schéma de Rusanov est d'ordre inférieur (figure (7.26)).

Le maillage contient 400 points et les résultats sont donnés à $t = 0.4$.

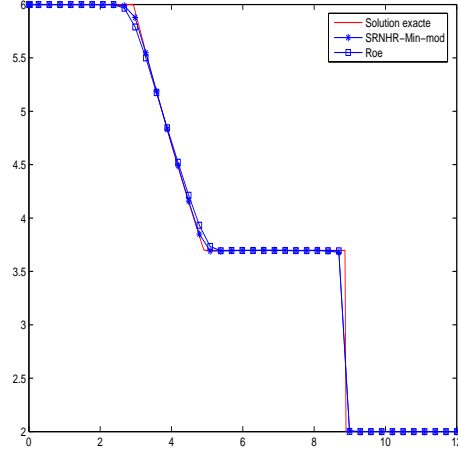


FIG. 7.18 – St.Venant homogène, hauteur d'eau, schéma SRNHR et Roe.

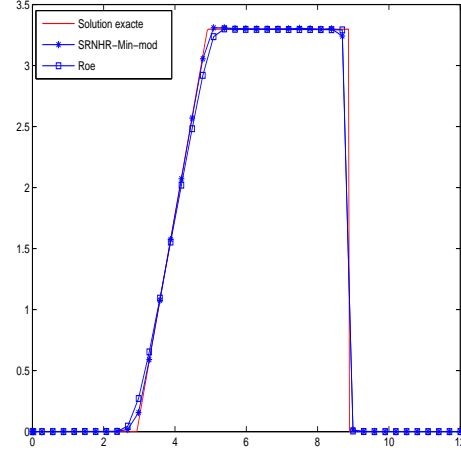


FIG. 7.19 – St.Venant homogène, vitesse de l'eau, schéma SRNHR et Roe.

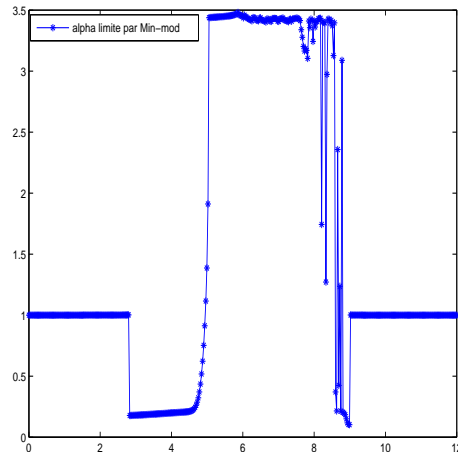


FIG. 7.20 – St.Venant homogène, variation de $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$.

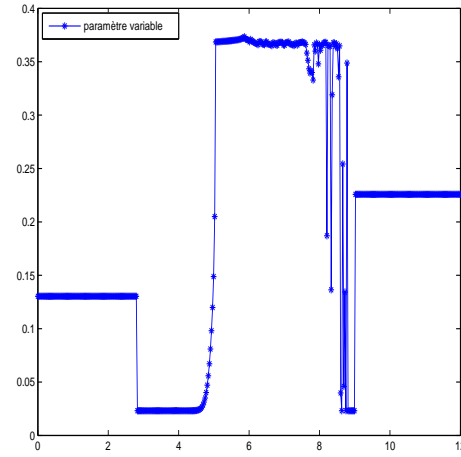


FIG. 7.21 – St.Venant homogène, variation du parametre $\frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{S_{j+\frac{1}{2}}^n}$.

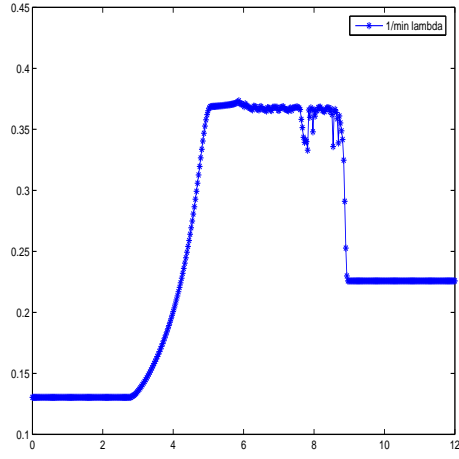


FIG. 7.22 – St.Venant homogène, variation du paramètre $\frac{1}{s_{j+1/2}}$.

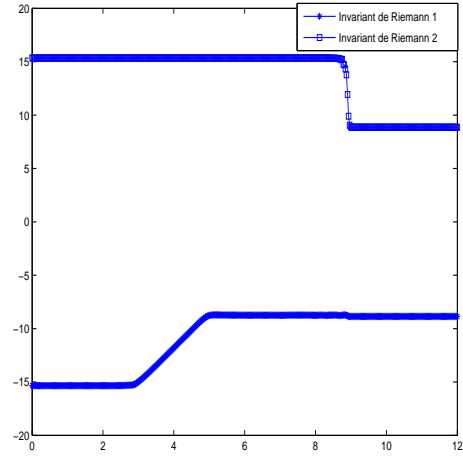


FIG. 7.23 – St.Venant homogène, invariants de Riemann.

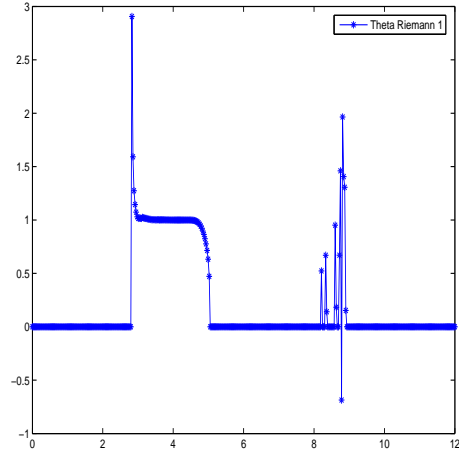


FIG. 7.24 – St.Venant homogène, variation de θ_{W_1} .

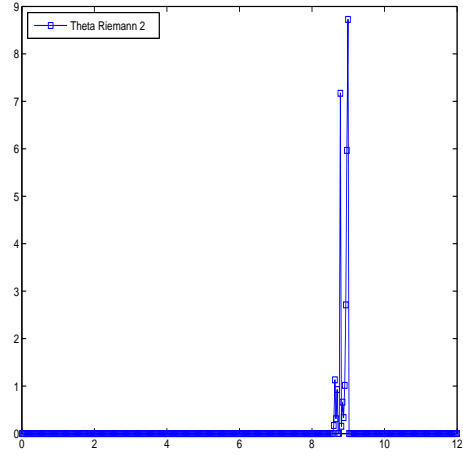


FIG. 7.25 – St.Venant homogène, variation de θ_{W_2} .

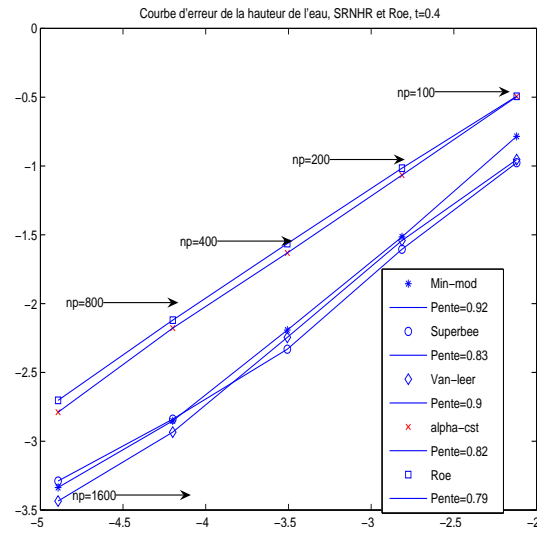


FIG. 7.26 – St.Venant homogène, hauteur de l'eau ; courbe d'erreur schémas SRNHR, Roe et Rusanov

7.3.4 Problème de Saint-Venant non homogène

On s'intéresse ici à l'équation de Saint-Venant, avec terme source

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(hu)}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(hu^2 + \frac{gh^2}{2})}{\partial x}(x, t) = -gh(x, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x) \\ z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases} \\ h_0(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 6 \\ 1 & \text{si } x > 6. \end{cases} \\ u_0(x) = 0. \end{array} \right. \quad (7.11)$$

Préservation de l'état stationnaire

Pour montrer que ce schéma vérifie numériquement la C-propriété on prend deux cas tests correspondant à de l'eau au repos.

Cas test 1

Si on prend les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases} \\ h_0(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 6 \\ 4 & \text{si } x > 6, \end{cases} \\ u_0(x) = 0 \end{array} \right. \quad (7.12)$$

On voit que le schéma *SRNHR* conserve bien la C-propriété (voir figures FIG. 7.27 et FIG. 7.28)

Cas test 2

On considère les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \\ 1 - (x - 6)^2 & \text{sinon} \end{cases} \\ h_0(x) = 5 - z(x), \\ u_0(x) = 0 \end{array} \right. \quad (7.13)$$

On voit que le schéma *SRNHR* conserve ici aussi la C-propriété (voir figures FIG. 7.29 et FIG. 7.30)

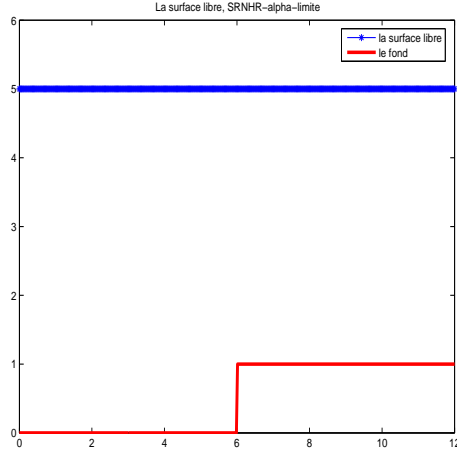


FIG. 7.27 – Courbe de la surface libre de l'eau, schéma SRNHR, $t = 100s$.

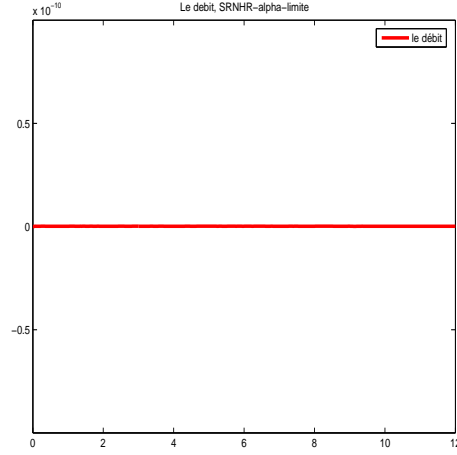


FIG. 7.28 – Courbe du débit de l'eau ; schéma SRNHR, $t = 100s$

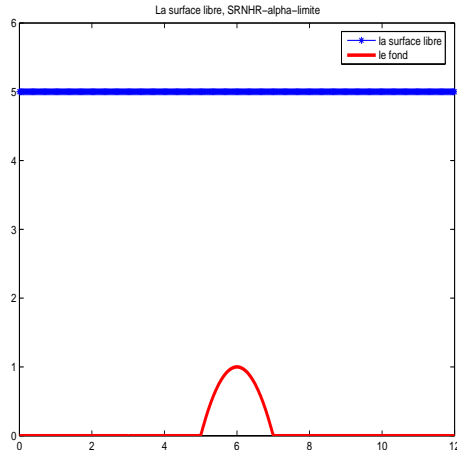


FIG. 7.29 – Courbe de la surface libre de l'eau, schéma SRNHR, $t = 100s$.

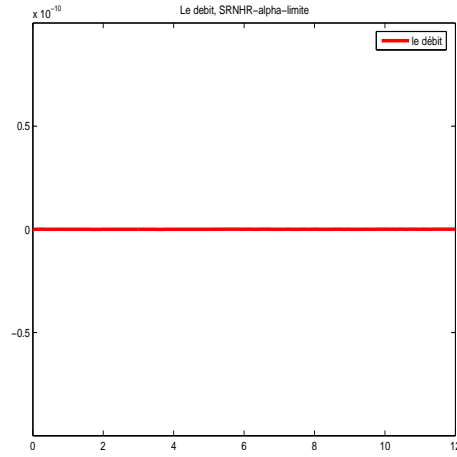


FIG. 7.30 – Le débit de l'eau ; schéma SRNHR, $t = 100s$.

Cas test de rupture de barrage sur fond mouillé avec une marche :

On considère un canal d'une longueur de 12 m, possédant un fond en forme de marche (le terme source de (7.11) décrit la géométrie du fond).

Pour réaliser les simulations numériques de ce problème, on utilise les schéma SRNHR et de Vazquez. Les calculs ont été effectués sur un maillage comportant 100 points ; les résultats sont donnés à $t = 0.5$. On compare les résultats obtenus avec ces schémas à la solution exacte.

On sait que la solution contient trois types d'ondes : une onde de raréfaction se propageant vers la gauche, une onde de discontinuité de contact linéaire provenant de la marche et une onde de choc se propageant vers la droite.

On remarque que la solution numérique obtenue par le schéma SRNHR se comporte comme la solution exacte (figures (7.31) et (7.32)) et est nettement meilleure que celle obtenue avec le schéma de Vazquez (dans le cas homogène, les schémas de Vazquez et de Roe sont

équivalents).

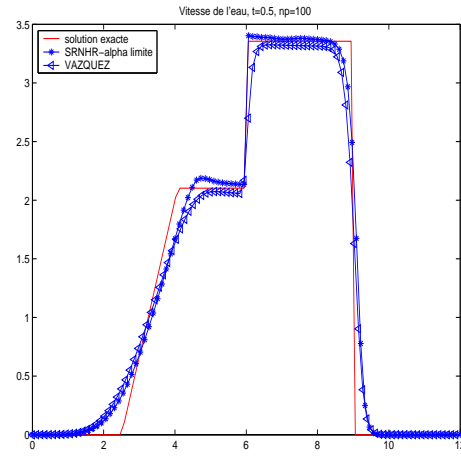
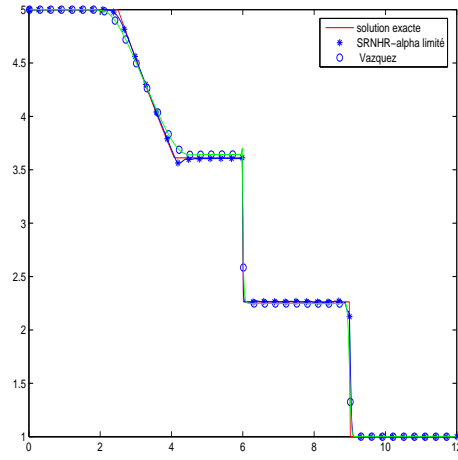


FIG. 7.31 – St.Venant non homogène, hauteur de l'eau, schéma SRNHR et schéma de Vazquez. FIG. 7.32 – St.Venant non homogène, vitesse de l'eau; schéma SRNHR et schéma de Vazquez.

La figure (7.33) représente la courbe de convergence obtenue. On constate que l'ordre est meilleur dans le cas du schéma SRNHR que dans celui de Vazquez.

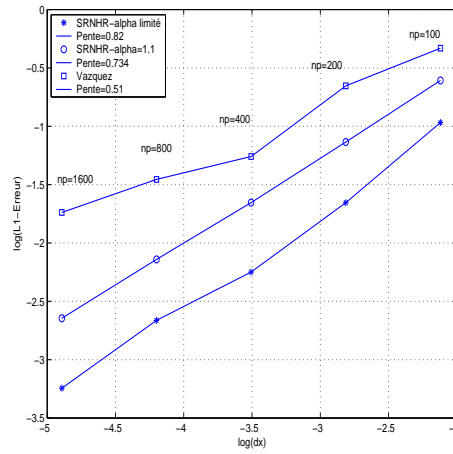


FIG. 7.33 – St.Venant non homogène, courbe d'erreur (hauteur de l'eau); schémas SRNHR ($\alpha^n_{j+\frac{1}{2}}$ limité puis constant) et de Vazquez.

On réalise maintenant le même cas test que précédemment, mais avec la condition initiale

$$\left\{ \begin{array}{ll} z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ h_0(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases} \\ u_0(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0 \\ 9 & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \quad (7.14)$$

dont on connaît la solution analytique (d'après les travaux de F. Benkhaldoun et F. Al-crudo [AB01]). On va donc comparer la solution obtenue avec le schéma SRNHR (à $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant = 1.8) à la solution exacte.

Les calculs ont été réalisés sur un maillage de 800 points ; les résultats sont donnés à $t = 0.7$ (figures (7.34) et (7.35)).

L'ordre numérique obtenu est égal à 0.59, comme on peut le constater sur la figure (7.36).

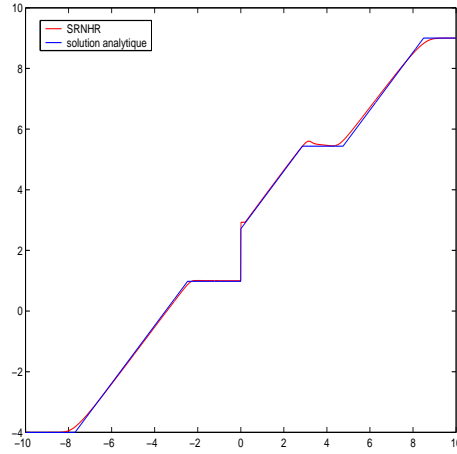
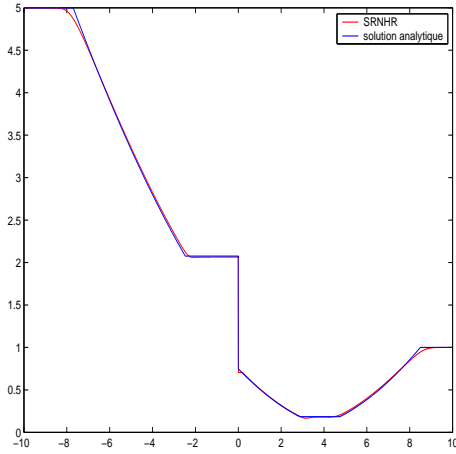


FIG. 7.34 – St-Venant non homogène, hauteur de l'eau ; schéma SRNHR. FIG. 7.35 – St-Venant non homogène, vitesse de l'eau ; schéma SRNHR.

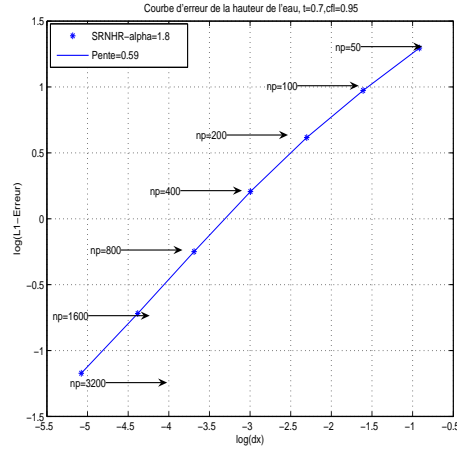


FIG. 7.36 – Courbe d'erreur ; hauteur de l'eau ; schéma SRNHR.

On utilise maintenant le même schéma en effectuant une montée en ordre (voir, par exemple, [GR96]). Pour cela, on calcule les gradients par la méthode des moindres carrés, que l'on limite par le limiteur Min-Mod. On constate alors que l'ordre numérique du schéma est sensiblement amélioré (0.65), comme on peut le voir sur la figure (7.39). Cette dernière permet également de remarquer que l'on gagne en précision en raffinant les maillages les plus grossiers, mais ensuite que les maillages les plus fins n'apportent plus grand chose.

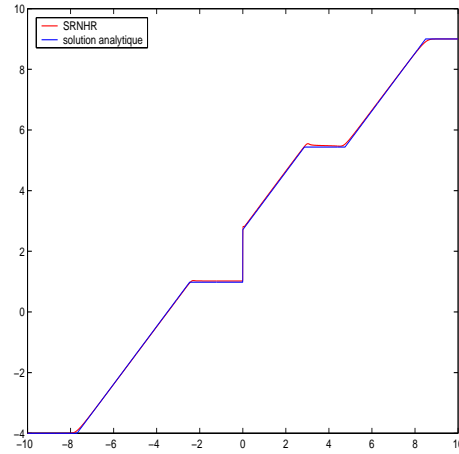
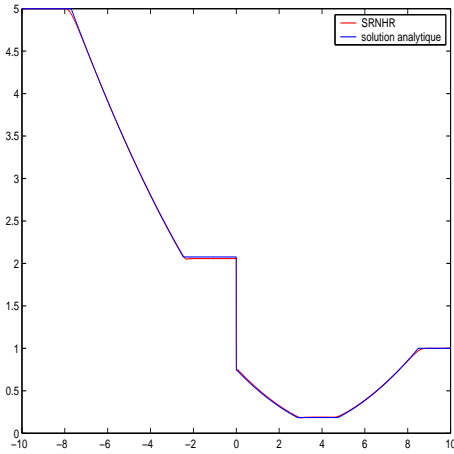


FIG. 7.37 – St-Venant non homogène, hauteur de l'eau ; schéma SRNHR avec limiteur. FIG. 7.38 – St-Venant non homogène, vitesse de l'eau ; schéma SRNHR avec limiteur.

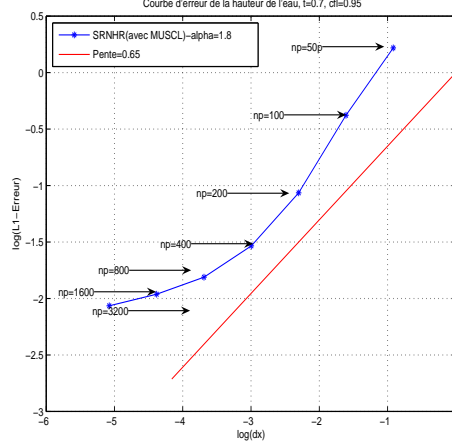


FIG. 7.39 – Courbe d’erreur ; hauteur de l’eau ; schéma SRNHR avec limiteur.

7.4 Problème de Saint-Venant 2D

7.4.1 Problème de Saint-Venant 2D homogène

De nouveau, on considère le système des équations de Saint-Venant qui modélise un écoulement en eaux peu profondes (u est la composante de la vitesse dans la direction x et v celle dans la direction y) :

$$\forall (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial(hu)}{\partial x}(x, y, t) + \frac{\partial(hv)}{\partial y}(x, y, t) = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial(hu^2 + \frac{gh^2}{2})}{\partial x}(x, y, t) + \frac{\partial(huv)}{\partial y}(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2 + \frac{gh^2}{2})}{\partial y}(x, y, t) = 0 \\ h(x, y, 0) = h_0(x, y) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), \end{array} \right. \quad (7.15)$$

h_0 , u_0 et v_0 étant des fonctions données définies sur Ω .

On effectue des simulations numériques de ce système en utilisant les schémas SRNHR et de Rusanov, sur le domaine Ω défini par : $x \in [0; 12]$ et $y \in [0; 1]$ (figure (7.40)).

On prend des maillages non structurés, plus ou moins fins. Les figures (7.41), (7.42), (7.43) et (7.44) montrent la taille des mailles sur le carré $[0; 1]^2$.

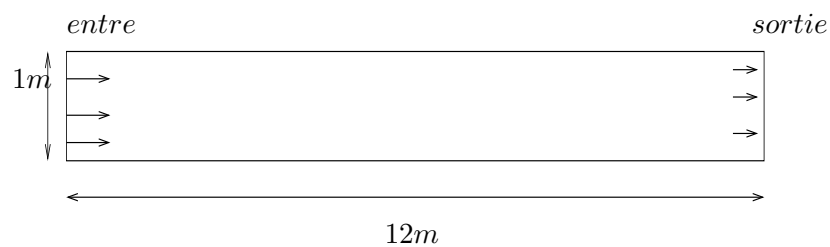


FIG. 7.40 – Domaine de calcul

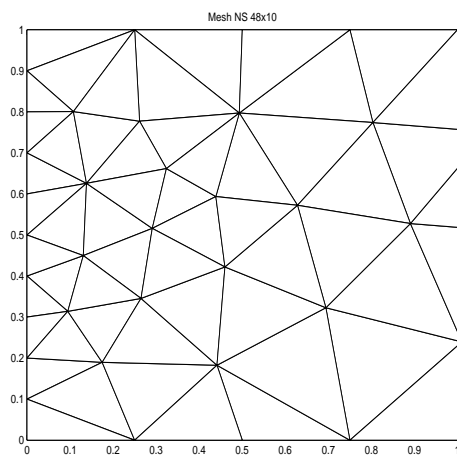


FIG. 7.41 – Maillage 48×10 .

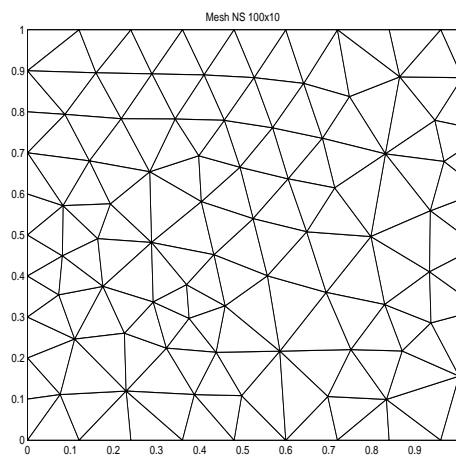


FIG. 7.42 – Maillage 100×10 .

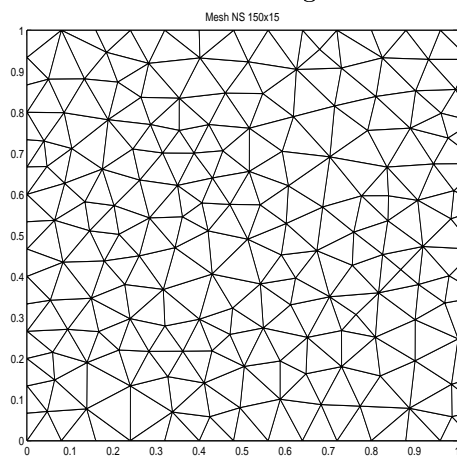


FIG. 7.43 – Maillage 150×15 .

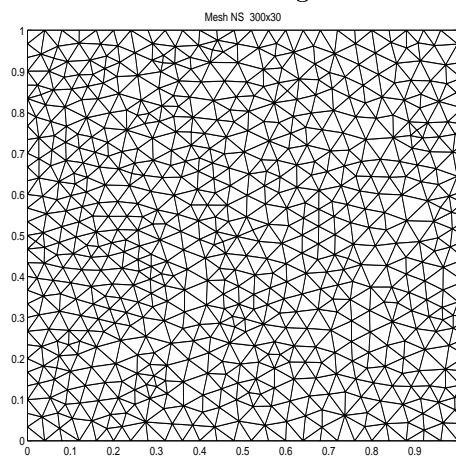


FIG. 7.44 – Maillage 300×30 .

Cas test de rupture de barrage sur fond mouillé :

On prend pour condition initiale

$$h_0(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 6, \quad \forall y \in [0; 1] \\ 2 & \text{si } x > 6, \quad \forall y \in [0; 1] \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0, \quad \forall x \in [0; 12], \quad \forall y \in [0; 1].$$

Les conditions limites correspondent aux conditions initiales.

On compare les résultats obtenus avec les schémas SRNHR (avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1.2$) et de Rusanov, à la solution exacte. Les calculs sont effectués à $cf l = 0.95$ et les résultats sont donnés à $t = 0.4$.

Remarque : Pour la représentation graphique (7.45), pour une valeur de y fixée égale à \bar{y} , on regarde tous les triangles traversés par la droite $y = \bar{y}$ et on représente, pour chacun de ces triangles, la valeur de la variable calculée sur ce triangle, en fonction de l'abscisse du centre de gravité de l'élément correspondant.

On remarque que le schéma SRNHR est beaucoup plus précis que celui de Rusanov (figure (7.45)).

La figure (7.46) représente la pente d'erreur (sur la hauteur d'eau) obtenue en utilisant les 4 maillages présentés précédemment. La taille du maillage est déterminée par

$$H_{max} = \max_i \left(\max_j |\gamma_{ij}| \right)$$

où γ_{ij} désigne l'arête commune aux cellules c_i et c_j .

La pente moyenne de la courbe obtenue est égale à 0.83 pour le schéma SRNHR et à 0.76 pour le schéma de Rusanov.

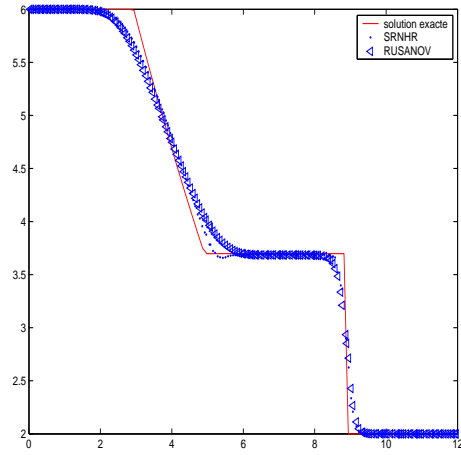


FIG. 7.45 – St-Venant 2D homogène, hauteur de l'eau; schémas SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant) et de Rusanov.

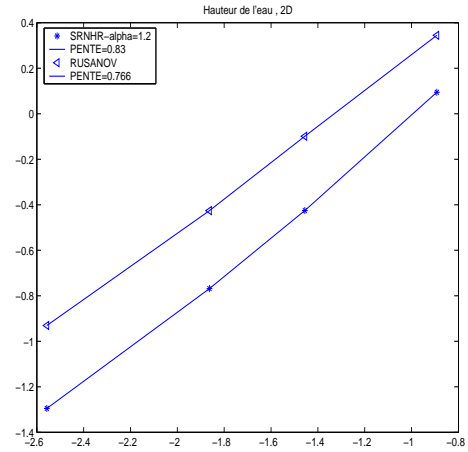


FIG. 7.46 – Courbe d'erreur; schémas SRNHR et de Rusanov

7.4.2 Problème de Saint-Venant 2D non-homogène

On considère le système de Saint-Venant avec terme source dans le cas bidimensionnel suivant

$$\forall (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial(hu)}{\partial x}(x, y, t) + \frac{\partial(hv)}{\partial y}(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x}(x, y, t) + \frac{\partial(hv)}{\partial y}(x, y, t) = -gh(x, y, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial(hv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial y}(x, y, t) = -gh(x, y, t) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \end{cases} \quad (7.16)$$

assorti des conditions initiales

$$\begin{cases} h(x, y, 0) = h_0(x, y) \\ (hu)(x, y, 0) = (hu)_0(x, y) \\ (hv)(x, y, 0) = (hv)_0(x, y) \\ z(x, y) \text{ donné} \end{cases}$$

Traitement de terme source : Le traitement du terme source a une grande influence sur la précision du schéma. Pour ce problème on approche le terme source, en utilisant, à l'étape correcteur, la méthode de Green suivante :

$$\int_{c_i} -gh \frac{\partial z}{\partial x} dx dy = -gh_i \int_{\partial c_i} z_{ij} \cdot (n_{ij})_x d\sigma = -gh_i \sum_{j=1}^{j=3} z_{ij} \cdot (n_{ij})_x \cdot \text{mes}(\gamma_{ij}),$$

où h_i est la hauteur de l'eau sur la cellule c_i , z_{ij} est une interpolation linéaire entre z_i et z_j donnée par

$$z_{ij} = \frac{z_i A_i + z_j A_j}{A_i + A_j},$$

$(n_{ij})_x$ est la normale unitaire à l'arête γ_{ij} dans la direction x et A_i est l'aire de la cellule c_i .

On fait de même pour le traitement de terme source dans la direction y .

On réalise trois études, pour lesquelles les conditions initiales sont différentes.

Cas Saint-Venant 2D non homogène subcritique :

On choisit les conditions suivantes

$$h_0(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 6, \quad \forall y \in [0; 1] \\ 2 & \text{si } x > 6, \quad \forall y \in [0; 1] \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0, \quad \forall x \in [0; 12], \quad \forall y \in [0; 1].$$

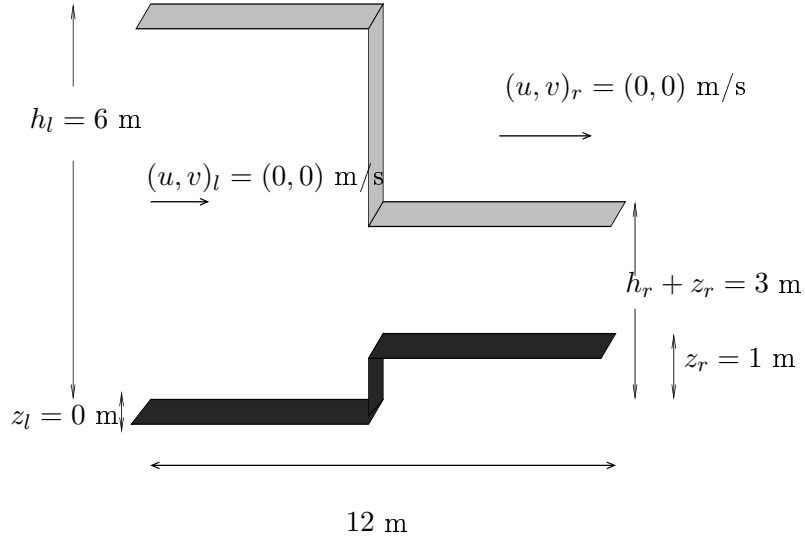


FIG. 7.47 –

Les figures (7.48), (7.49), (7.50), (7.51), (7.52), (7.53) et (7.54) représentent les résultats obtenus avec le maillage non structuré 100×10 (7.42). Dans ce cas test, la solution contient trois types d'ondes : une onde de raréfaction, une discontinuité de contact et un choc. On constate que le schéma SRNHR est capable de bien capturer le choc et la discontinuité de contact. D'autre part, les isovalues sont des droites parallèles ; ces résultats sont donc comparables au cas monodimensionnel.

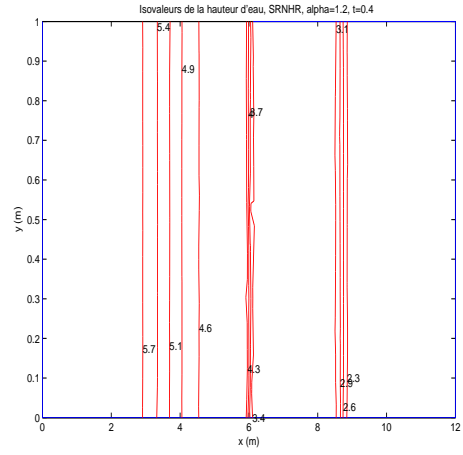
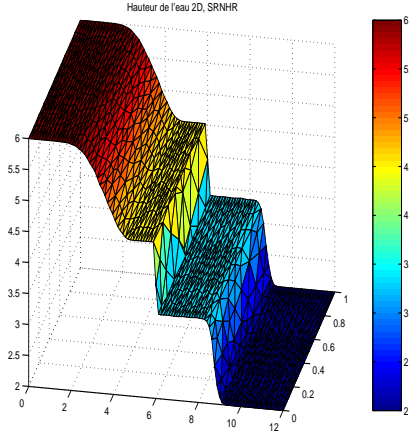


FIG. 7.48 – St-Venant 2D non homogène, hauteur de l'eau ; schéma SRNHR.

FIG. 7.49 – Isovaleurs de la hauteur d'eau ; schéma SRNHR.

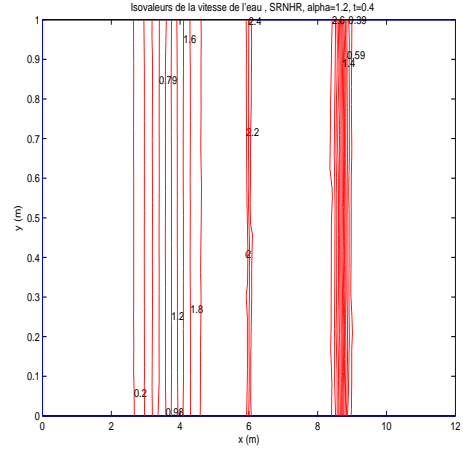
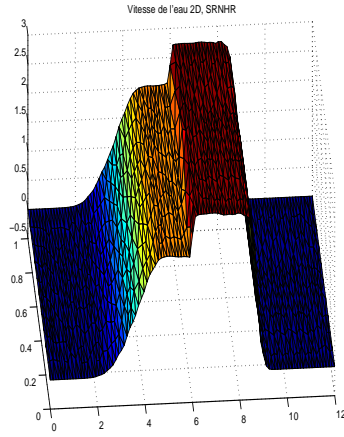


FIG. 7.50 – St-Venant 2D non homogène ; vitesse de l'eau ; schéma SRNHR.

FIG. 7.51 – Isovaleurs de la vitesse de l'eau ; schéma SRNHR.

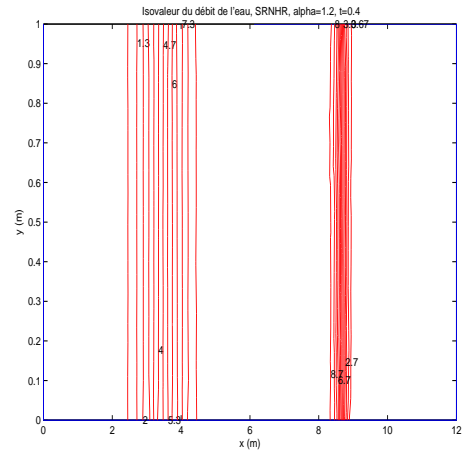
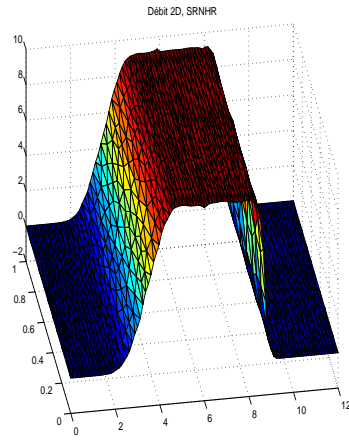


FIG. 7.52 – St-Venant 2D non homogène; débit de l'eau; schéma SRNHR. FIG. 7.53 – Isovaleur du débit de l'eau; schéma SRNHR.

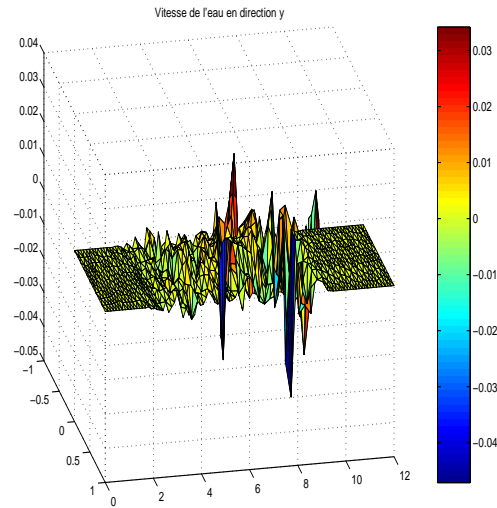


FIG. 7.54 – St-Venant 2D non homogène; vitesse de l'eau (direction y); schéma SRNHR.

Cas Saint-Venant 2D non homogène transcritique :

On prend maintenant les conditions

$$h_0(x, y) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 6, \quad \forall y \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 6, \quad \forall y \in [0; 1] \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 6, \quad \forall y \in [0; 1] \\ 9 & \text{si } x > 6, \quad \forall y \in [0; 1] \end{cases}$$

$$v_0(x, y) = 0, \quad \forall x \in [0; 12], \quad \forall y \in [0; 1].$$

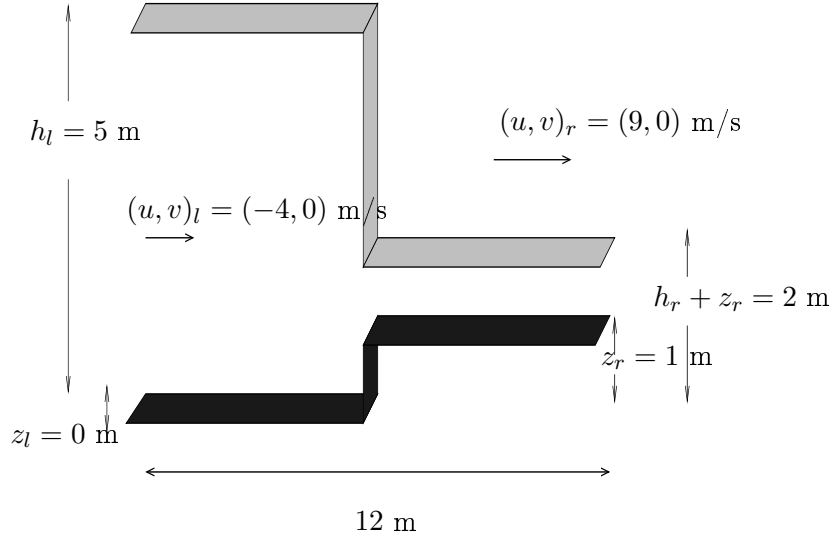


FIG. 7.55 –

Les conditions limites correspondent aux conditions initiales.

Dans ce cas la solution ne contient que des ondes de raréfaction. Les figures (7.56), (7.58) et (7.60) montrent que le schéma SRNHR permet de bien capturer les phases de transition. D'autre part, les figures (7.57), (7.59) et (7.61) montrent que les isovaleurs sont des droites parallèles ce qui indique que le problème garde son caractère monodimensionnel.

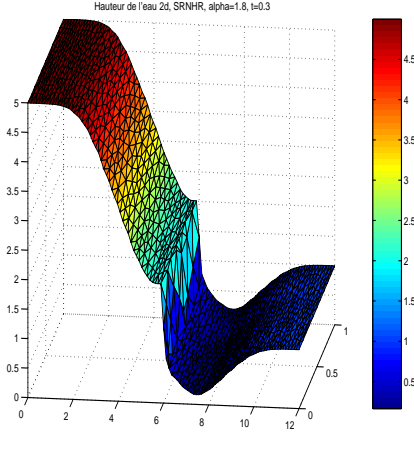


FIG. 7.56 – St.Venant 2D non homogène, hauteur de l'eau, schéma SRNHR, $t=0.3$, maillage 100×10 .

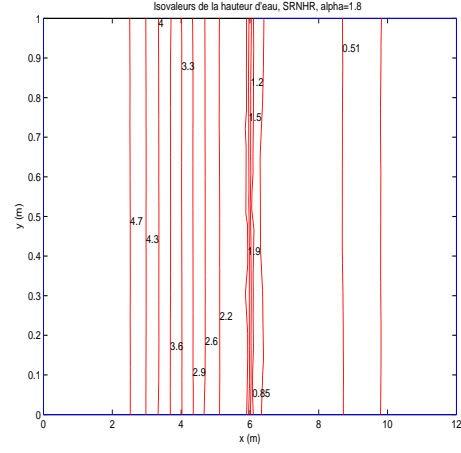


FIG. 7.57 – Isovaleurs de la hauteur d'eau, schéma SRNHR.

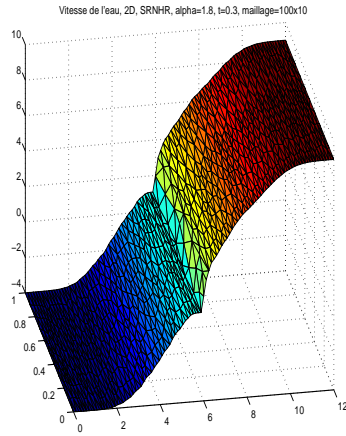


FIG. 7.58 – St.Venant 2D non homogène, vitesse de l'eau, schéma SRNHR, $t=0.3$, maillage 100×10 .

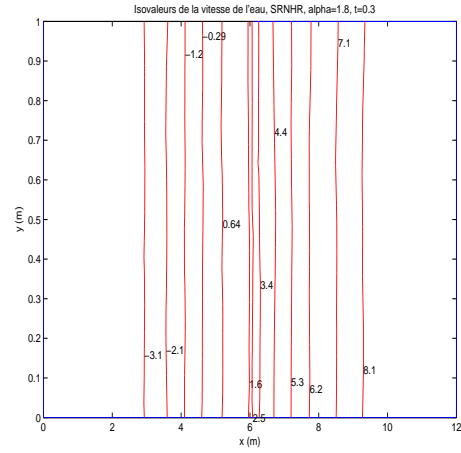


FIG. 7.59 – Isovaleurs de la hauteur d'eau, schéma SRNHR.

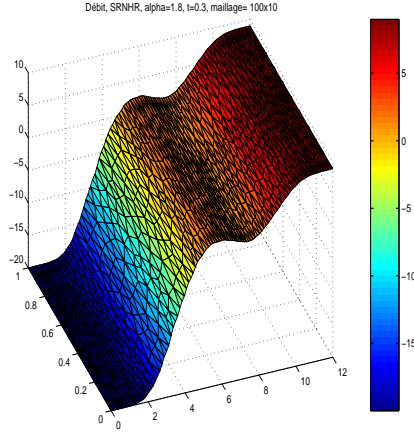


FIG. 7.60 – St.Venant 2D non homogène, débit de l'eau, schéma SRNHR, $t=0.3$, maillage 100×10 .

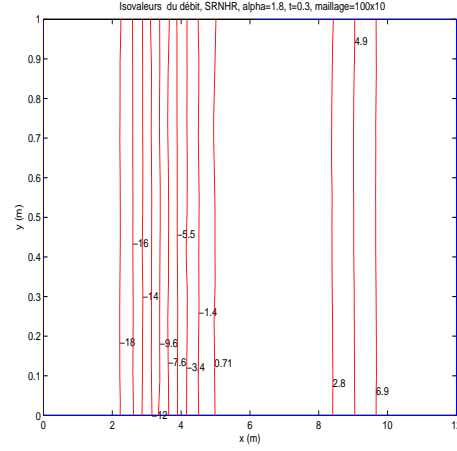


FIG. 7.61 – Isovaleurs du débit d'eau, schéma SRNHR.

Cas Saint-Venant 2D non homogène surcritique :

On prend maintenant les conditions

$$h_0(x, y) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 6, \quad \forall y \in [0; 1] \\ 0, 1 & \text{si } x > 6, \quad \forall y \in [0; 1] \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0, \quad \forall x \in [0; 12], \quad \forall y \in [0; 1].$$

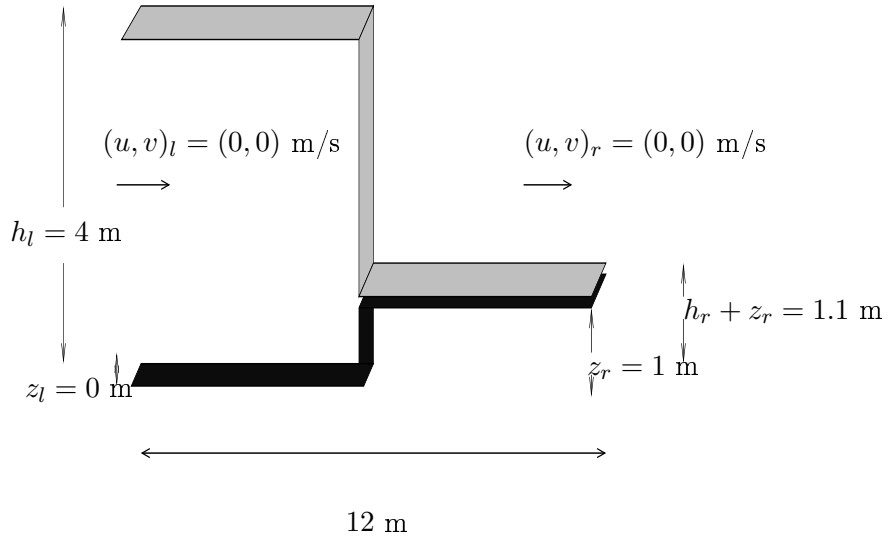


FIG. 7.62 –

Les conditions limites correspondent aux conditions initiales.

Pour ce cas (très “raide”), la solution contient des ondes des raréfaction et de choc. Les figures (7.63), (7.65) et (7.67) montrent que le schéma SRNHR est capable de bien

capturer la phase de transition et le choc. Les figures (7.64), (7.66) et (7.68) montrent que les isovaleurs sont des droites parallèles; ces résultats sont donc comparables au cas monodimensionnel.

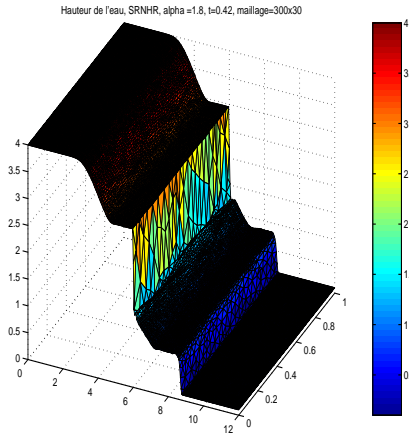


FIG. 7.63 – St.Venant 2D non homogène, hauteur de l'eau, schéma SRNHR, $t=0.3$, maill 300×30 .

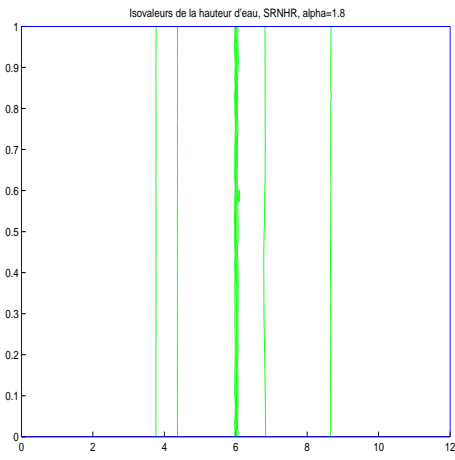


FIG. 7.64 – Isovaleurs de la hauteur d'eau, schéma SRNHR.

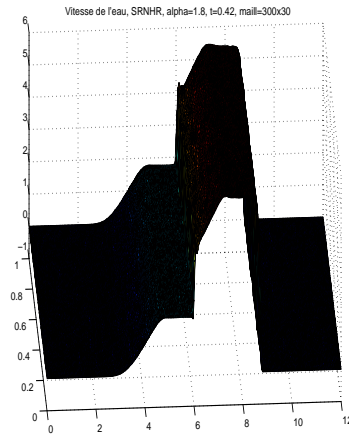


FIG. 7.65 – St.Venant 2D non homogène, vitesse de l'eau, schéma SRNHR, $t=0.3$, maillage 300×30 .

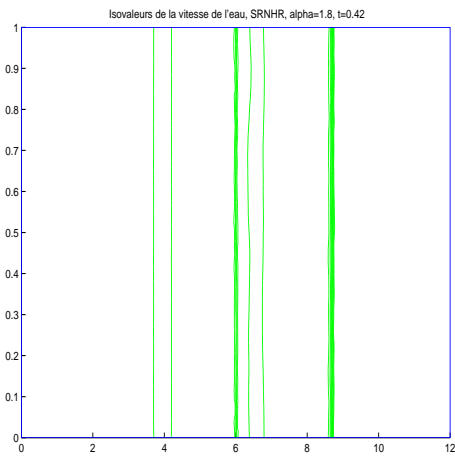


FIG. 7.66 – Isovaleurs de la hauteur d'eau, schéma SRNHR.

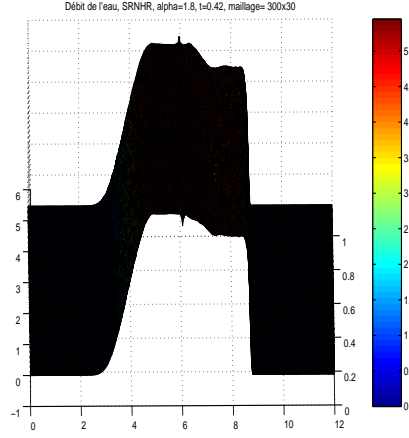


FIG. 7.67 – St.Venant 2D non homogène, débit de l'eau, schéma SRNHR, $t=0.3$, maillage 300×30 .

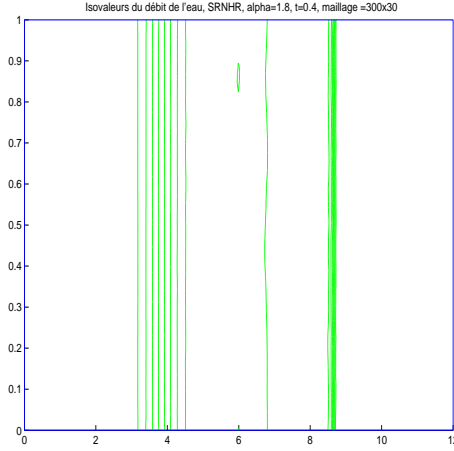


FIG. 7.68 – Isovaleurs du débit de l'eau, schéma SRNHR.

7.5 Discussion sur le choix d'approximation du terme non différentiel

On a vu, au premier paragraphe de ce chapitre, que dans l'étape prédicteur du schéma SRNHR, se posait le problème du choix de la discrétisation du terme source, dans le but de préserver les états d'équilibre. On a en effet défini, dans (6.3) et (6.7), une quantité moyenne $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n$, à déterminer entre deux états ξ_j^n et ξ_{j+1}^n . Deux possibilités sont alors offertes : soit utiliser pour $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n$ la valeur $\xi_{j+\frac{1}{2}}^n$ calculée à l'étape précédente (pour Saint-Venant) ou à l'étape en cours (pour Burgers), soit utiliser la moyenne entre les états voisins : $\frac{\xi_j^n + \xi_{j+1}^n}{2}$.

Le tableau (7.73) montre les résultats obtenus pour le problème de Burgers d'une part et de Saint-Venant d'autre part, en fonction des choix effectués pour la quantité $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n$.

Les calculs sont réalisés en 1D, avec le schéma SRNHR (en utilisant le limiteur Superbee pour le problème de Burgers et le limiteur "0 ou 1", pour le problème de Saint-Venant). Les résultats sont donnés figures (7.69), (7.70), (7.71) et (7.72).

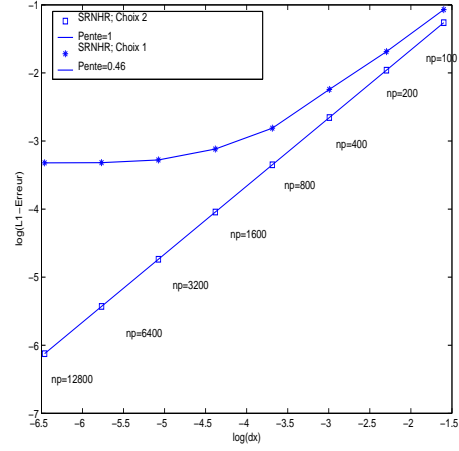
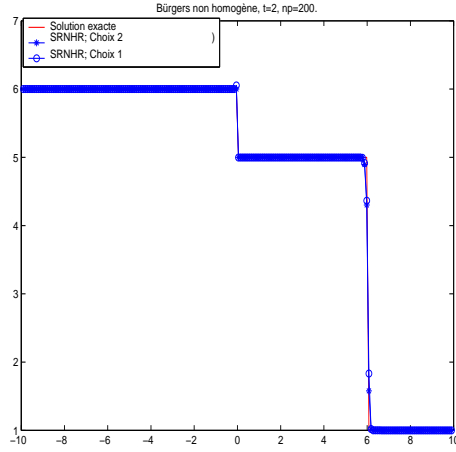


FIG. 7.69 – Burgers non homogène; schéma SRNHR. FIG. 7.70 – Courbe d'erreur (Burgers non homogène); schéma SRNHR.

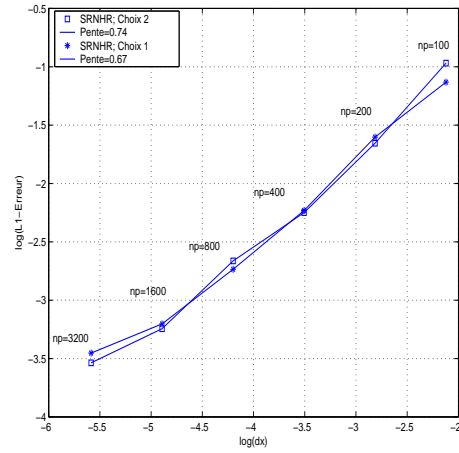
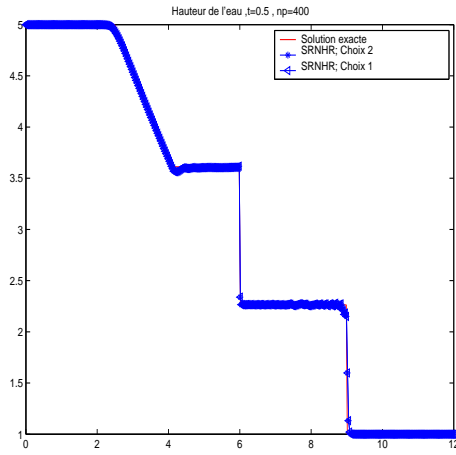


FIG. 7.71 – St-Venant non homogène; schéma SRNHR comparé à la solution exacte. FIG. 7.72 – Courbe d'erreur (St-Venant non homogène); schéma SRNHR.

	Choix 1 : $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n = \xi_{j+\frac{1}{2}}^n$	Choix 2 : $\tilde{\xi}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\xi_j^n + \xi_{j+1}^n}{2}$
Bürgers	Mauvaise convergence	Bonne convergence
Saint-Venant	Bonne convergence	Bonne convergence

FIG. 7.73 – Tableau

7.6 Problème d'Euler 1D

Les équations d'Euler sont décrites dans le premier chapitre. Nous allons tester ici le schéma SRNHR sur des cas tests classiques d'écoulement monophasique compressible, dans le cadre de la dynamique des gaz décrite par les équations d'Euler.

L'objectif de ces cas tests est la validation qualitative et quantitative de schéma SRNHR.

Cas test : Onde supersonique 1-raréfaction

On considère un tube de longueur 20 mètres divisé en son milieu par une membrane, de part et d'autre de laquelle se trouve de l'air au repos à deux niveaux de pression et de masse volumique distincts.

Plus précisément, on a les conditions initiales

$$\begin{aligned}\rho_0(x) &= \begin{cases} 1 \text{ kg/m}^3 & \text{si } x \leq 0 \\ 0.01 \text{ kg/m}^3 & \text{si } x > 0, \end{cases} \\ u_0(x) &= 0 \text{ m/s}, \quad \forall x \in [-10; 10], \\ P_0(x) &= \begin{cases} 10^5 \text{ Pa} & \text{si } x \leq 0 \\ 10^3 \text{ Pa} & \text{si } x > 0, \end{cases}\end{aligned}$$

Les conditions limites correspondent à la condition initiale.

A $t = 0$, on supprime la membrane.

Les calculs ont été réalisés sur un maillage de 400 points, à $cfl = 0.75$, avec $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant ($= 1.2$) ; les résultats sont donnés à $t = 0.01$.

On compare les résultats obtenus avec le schéma SRNHR avec ceux obtenus par le schéma de Roe. Ce cas test est traité par Seguin ([Seg02]) qui utilise le schéma VFRoe avec une correction d'entropie.

Dans ce cas test, où le gaz est raréfié, le premier champ caractéristique est une onde de raréfaction qui contient un point sonique. C'est la raison pour laquelle, il faut rajouter une correction d'entropie dans le schéma de Roe. On constate que le schéma SRNHR donne de très bons résultats sans correction entropique (figures (7.74) et (7.75)).

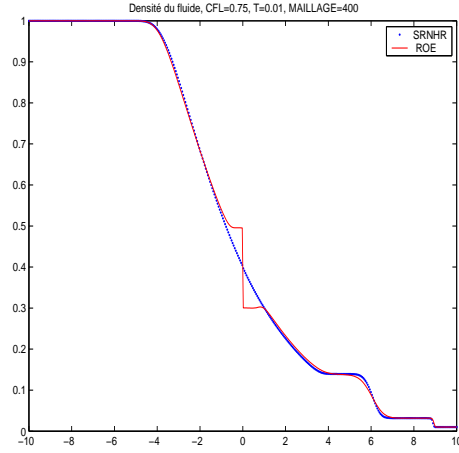


FIG. 7.74 – Densité du fluide; schémas SRNHR et de Roe.

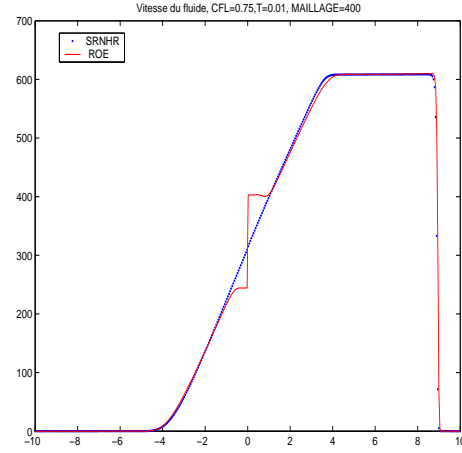


FIG. 7.75 – Vitesse du fluide; schémas SRNHR et de Roe.

7.7 Problème d'Euler 2D

Tube à choc

On réalise maintenant le même cas test que précédemment, mais dans un domaine bidimensionnel, représentant toujours un tube de section constante, de longueur 12 mètres et de largeur 1 mètre, divisé en son milieu par une membrane.

Les conditions initiales sont données par

$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 12 \text{ kg/m}^3 & \text{si } x \leq 6, \quad \forall y \in [0; 1] \\ 1.2 \text{ kg/m}^3 & \text{si } x > 6, \quad \forall y \in [0; 1] \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0, \quad \forall x \in [0; 12], \quad \forall y \in [0; 1].$$

$$P_0(x, y) = \begin{cases} 10^5 \text{ Pa} & \text{si } x \leq 6, \quad \forall y \in [0; 1] \\ 10^4 \text{ Pa} & \text{si } x > 6, \quad \forall y \in [0; 1] \end{cases}$$

Les calculs sont réalisés sur un maillage triangulaire 150×15 dont un extrait est représenté figure (7.43), avec le schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 1.8$), à $cfl = 0.75$; les résultats sont donnés à $t = 0.0039$.

Les résultats obtenus (figures (7.76), (7.77), (7.78) et (7.79)) permettent de mettre en évidence le fait que le schéma SRNHR donne des résultats précis dans les zones régulières, mais n'est pas entièrement satisfaisant au niveau de la raideur du choc.

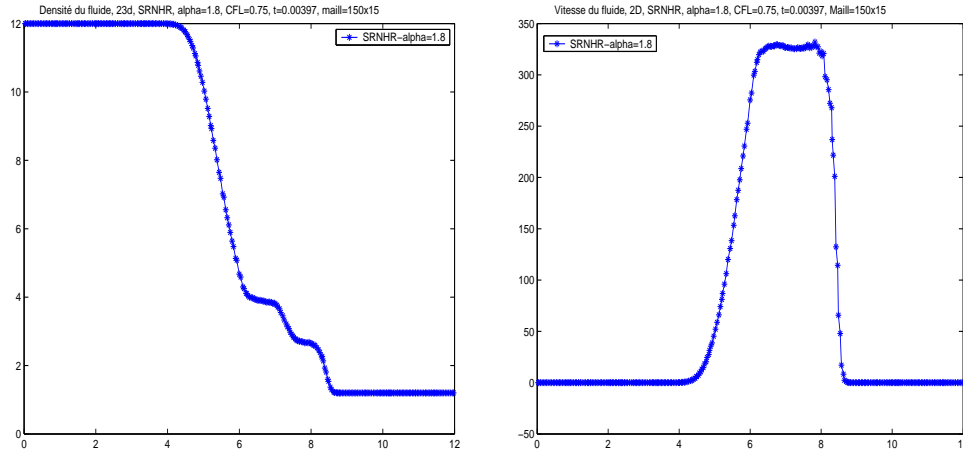


FIG. 7.76 – Euler 2D, densité du fluide; FIG. 7.77 – Euler 2D, vitesse du fluide; schéma SRNHR.

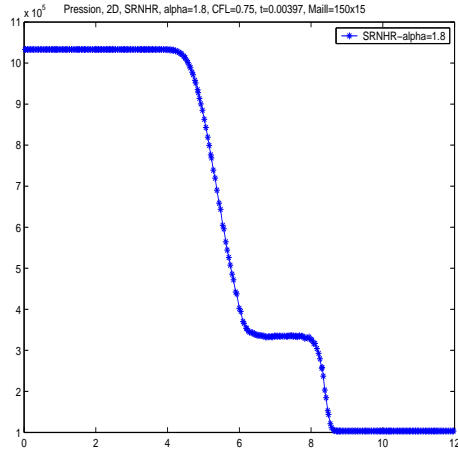


FIG. 7.78 – Euler 2D, pression du fluide ; schéma SRNHR.

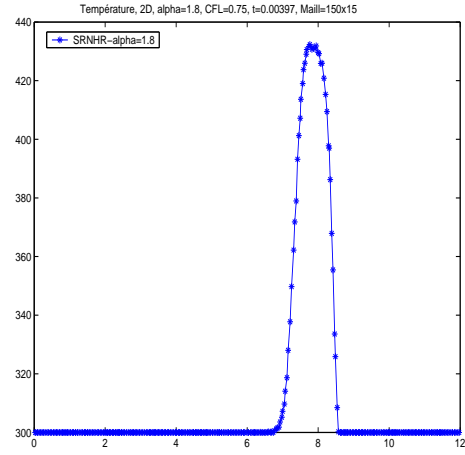


FIG. 7.79 – Euler 2D, température du fluide ; schéma SRNHR.

Les cas tests effectués dans ce chapitre dédié aux expériences monophasiques, nous ont permis de vérifier que le schéma SRNHR avait bien répondu à nos attentes en termes de fiabilité et de précision. On a pu le valider ainsi sur des cas tests classiques et vérifier ainsi ses bonnes performances sur des modèles non homogènes, modèles pour lesquels il a été conçu. Le chapitre suivant présentera d'autres expériences numériques, concernant cette fois, des cas diphasiques.

Bibliographie

- [AB01] F. Alcrudo and F. Benkhaldoun, *Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step*, Comput. & Fluids **30** (2001), no. 6, 643–671.
- [BGP04] D. Bouche, J.-M. Ghidaglia, and F. Pascal, *Error estimate and the geometric corrector for the upwind finite volume method applied to the linear advection equation*, Tech. report, March 2004, A soumettre.
- [CCF94] B. Cockburn, F. Coquel, and P. Le Floch, *An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws*, Math. Comp. **63** (1994), no. 207, 77–103.
- [CCF95] B. Cockburn, F. Coquel, and P.G. Le Floch, *Convergence of the finite volume method for multidimensional conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. **32** (1995), no. 3, 687–705.
- [Des03] B. Després, *Théorème de lax et volumes finis*, Canum, 2003.
- [EGGH98] R. Eymard, T. Gallouët, M. Ghilani, and R. Herbin, *Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes*, IMA J. Numer. Anal. **18** (1998), no. 4, 563–594.
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020. MR 2002e :65138
- [GR96] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Hir90] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows. volume2 : Computational methods for inviscid and viscous flows*, Wiley Series in Numerical Methods in Engineering. Wiley-Interscience Publication, 1990.
- [Lev02] Randall J. Leveque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Seg02] N. Seguin, *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*, Ph.D. thesis, Université de provence, Aix-Marseille I, 2002.
- [Vil94] J.-P. Vila, *Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws. I. Explicit monotone schemes*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **28** (1994), no. 3, 267–295.

Chapitre 8

Expériences numériques en diphasique

Dans ce chapitre, on montre les résultats numériques obtenus avec un système bi-fluide à pression commune, non hyperbolique, non conservatif, muni d'une condition initiale que l'on écrit en dimension deux d'espace ici

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = Q_1(x, y, W) + Q_2(x, y, W) \\ W(x, y, 0) = W_0(x, y), \end{cases} \quad (8.1)$$

avec

$$\begin{aligned} W(x, y, t) &= (\mu_l \rho_l \quad \mu_l \rho_l u_l \quad \mu_l \rho_l v_l \quad \mu_v \rho_v \quad \mu_v \rho_v u_v \quad \mu_v \rho_v v_v)^t, \\ F(W(x, y, t)) &= (\mu_l \rho_l u_l \quad \mu_l \rho_l u_l^2 \quad \mu_l \rho_l u_l v_l \quad \mu_v \rho_v u_v \quad \mu_v \rho_v u_v^2 \quad \mu_v \rho_v u_v v_v)^t, \\ G(W(x, y, t)) &= (\mu_l \rho_l v_l \quad \mu_l \rho_l u_l v_l \quad \mu_l \rho_l v_l^2 \quad \mu_v \rho_v v_v \quad \mu_v \rho_v u_v v_v \quad \mu_v \rho_v v_v^2)^t, \\ Q_1(x, y, W) &= (0 \quad -\mu_l \frac{\partial P}{\partial x} \quad -\mu_l \frac{\partial P}{\partial y} \quad 0 \quad -\mu_v \frac{\partial P}{\partial x} \quad -\mu_v \frac{\partial P}{\partial y})^t, \\ Q_2(x, y, W) &= (0 \quad \mu_l \rho_l g \quad 0 \quad 0 \quad \mu_v \rho_v g \quad 0)^t. \end{aligned}$$

ρ_k , μ_k , u_k , v_k désignent la densité, le taux de présence, la vitesse en x et celle en y de la phase k (k étant égal à l ou v , l désignant l'état liquide et v l'état vapeur). P est la pression commune. Plus précisément, μ_v désigne le taux de présence de la vapeur, appelé également taux de vide et μ_l désigne le taux de présence du liquide.

Les lois d'état dans le cas isotherme sont données par $P = A_v \rho_v^\gamma$ et $\rho_l = K_l P^a$, où A_v , γ , K_l et a sont des constantes ($A_v = 10^5$, $\gamma = 1.4$, $K_l = 987.57$ et $a = 4.37 \times 10^{-5}$).

Ce système est non hyperbolique : il possède des valeurs propres complexes. Lorsque l'on choisit un taux de vide initial $\mu_v = 0.2$, la partie imaginaire des valeurs propres est prépondérante, ce qui n'est pas le cas pour un choix de taux de vide initial $\mu_v = 0.6$ pour lequel la partie imaginaire est faible.

8.1 Problème diphasique monodimensionnel

On considère le système bifluide non homogène (à pression commune)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = Q_1(x, U) + Q_2(x, U) \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases} \quad (8.2)$$

avec

$$\begin{aligned} U &= (\mu_v \rho_v \quad \mu_v \rho_v u_v \quad \mu_l \rho_l \quad \mu_l \rho_l u_l)^t, \\ F(U) &= (\mu_v \rho_v u_v \quad \mu_v \rho_v u_v^2 \quad \mu_l \rho_l u_l \quad \mu_l \rho_l u_l^2)^t, \\ Q_1(x, U) &= (0 \quad -\mu_v \frac{\partial P}{\partial x} \quad 0 \quad -\mu_l \frac{\partial P}{\partial x})^t, \\ Q_2(x, U) &= (0 \quad \mu_v \rho_v g \quad 0 \quad \mu_l \rho_l g)^t. \end{aligned}$$

Ce problème est non hyperbolique et non conservatif.

Remarque :

En supprimant l'indice dans (8.2), le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mu \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mu \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \mu \rho u^2}{\partial x} + \mu \frac{\partial P}{\partial x} = \mu \rho g. \end{cases} \quad (8.3)$$

Si on considère que la pression et la densité sont constantes et que les fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 , (8.3) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mu u}{\partial t} + \frac{\partial \mu u^2}{\partial x} = \mu g, \end{cases} \quad (8.4)$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \frac{u^2}{2}}{\partial x} = g. \end{cases} \quad (8.5)$$

Le problème (8.5) est bien posé et sa solution sert de référence pour la validation des résultats numériques.

L'équation de la masse est donc une équation linéaire, alors que celle de la quantité de mouvement est l'équation de Burgers avec terme source (g).

8.1.1 Application au problème de Ransom 1D

Description du cas test :

Le problème de Ransom est proposé dans [Ran87]; on peut le décrire comme suit : on considère l'écoulement d'une colonne d'eau (de longueur égale à 12 mètres) à la sortie d'un robinet débouchant dans une enceinte contenant de l'air. La vitesse d'entrée de l'eau est de 10m/s alors que l'air est au repos. Le rapport des sections de la buse et de l'enceinte est tel que le taux de vide intégré sur la section vaut 0.2. Dans cette configuration, on observe un phénomène de striction du jet sous l'effet de la pesanteur. En effet, si on fait l'hypothèse que le jet reste cohérent (pas d'arrachage de liquide sous forme de gouttes, pas de pénétration d'air dans le jet), l'accélération du liquide due à la pesanteur entraîne nécessairement un rétrécissement de la section de passage du liquide, par conservation du débit. De plus, si les conditions initiales correspondent à la solution qu'on obtiendrait en l'absence de pesanteur (donc $\mu = 0.2$ partout), une onde de taux de vide se propage de la section d'entrée vers la section de sortie à partir de l'instant initial.

Ce cas test permet de valider les schémas numériques développés, notamment pour ce qui concerne les points suivants

- la stabilité,
- la précision et la diffusion numérique (étalement du front de taux de vide),
- la vitesse des ondes de taux de vide,
- l'interaction avec un terme source simple (gravité).

Un autre intérêt de ce cas test réside dans le fait que l'on dispose d'une solution exacte partielle du cas 1D, moyennant certaines hypothèses peu restrictives.

8.1.2 Conditions de calcul

Modèle :

On considère le modèle à quatre équations (8.2) correspondant à deux équations de bilan de masse et deux équations de bilan de quantité de mouvement.

Maillage :

On utilise des maillages réguliers plus ou moins fins, contenant 24, 48, 100, 150, 200, 500 et 1000 points.

Les schémas :

On utilise les schémas de Rusanov et SRNHR.

Pas de temps :

Pour le schéma de Rusanov, le pas de temps est fixé en utilisant la condition de stabilité (4.5)

$$\Delta t = \frac{cfl}{M} dx \quad \text{où} \quad M = \max_j (S_{j+\frac{1}{2}}^n), \quad \forall n,$$

où $S_{j+\frac{1}{2}}^n$ est la vitesse de Rusanov définie par

$$S_{j+\frac{1}{2}}^n = \max_{p=1,\dots,m} (|\lambda_{i,p}^n|, |\lambda_{i+1,p}^n|),$$

$\lambda_{i,p}^n$ étant les valeurs propres de la matrice jacobienne associée au système étudié.

Pour le schéma SRNHR, on utilise la condition de stabilité (4.12)

$$\Delta t = \frac{cfl}{\alpha M} dx.$$

Remarque : Notons que la condition de stabilité pour le schéma SRNHR est plus restrictive que celle du schéma de Rusanov, puisqu'elle s'écrit $cfl \leq \frac{1}{\alpha}$, ($\alpha \geq 1$).

Condition initiale : $\forall x \in [x_0, x_l]$, la condition initiale est donnée par
 $\mu_v(t = 0) = 0.2$,
 $u_l(t = 0) = 10$,
 $u_v(t = 0) = 0$,
 $P(t = 0) = 10^5$,
 $\rho_v(t = 0) = 1$,
 $\rho_l(t = 0) = 988,0638$.

Condition aux limites :

- en entrée ($x_0 = 0$) : $\mu_v(0, t) = 0.2$, $u_l(0, t) = 10$, $u_v(0, t) = 0$.
- en sortie ($x_l = 12$) : $P(12, t) = 10^5$.

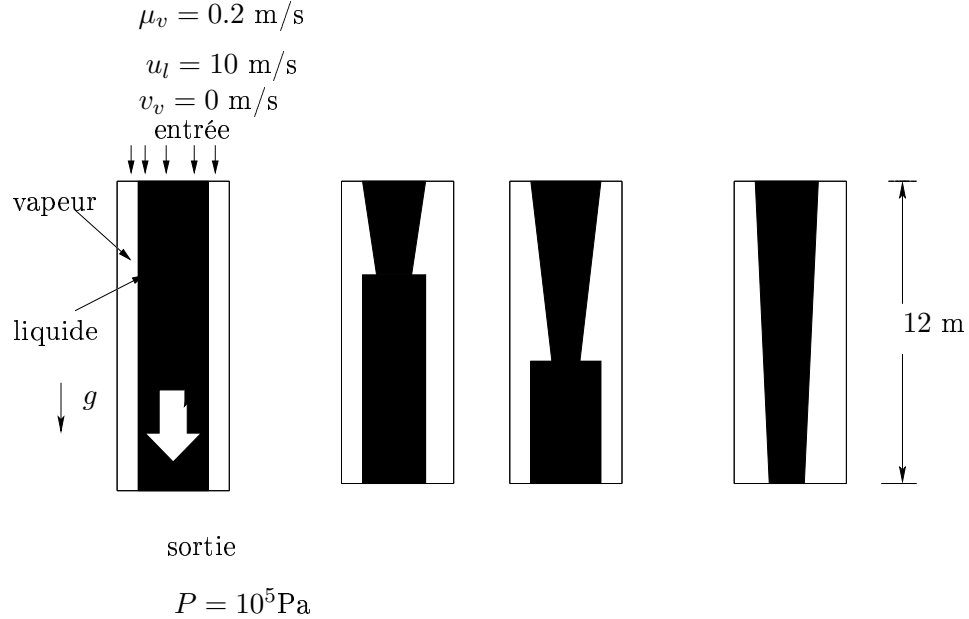


FIG. 8.1 – Problème de Ransom : variation de la quantité du liquide en fonction du temps

Remarque : Le problème originel de Ransom est donné avec $\mu_v = 0.2$; cependant, le cas où $\mu_v = 0.6$ est plus régulier, même si c'est un cas rarissime en pratique. C'est la raison pour laquelle on a réalisé les calculs avec ces deux valeurs de μ_v .

8.1.3 Résultats

- **Cas $\mu_v = 0.2$:**

On compare les solutions numériques obtenues en utilisant les deux schémas, à la solution exacte au même temps : $t = 0.6$. Les calculs sont réalisés à $cfl = 0.5$.

Les figures (8.2) et (8.3) montrent la variation du taux de vide ainsi que la vitesse du liquide, sur les différents maillages. On remarque, en raffinant le maillage, que la

solution numérique s'approche de la solution exacte.

Les courbes d'erreur mettent clairement en évidence que les ondes linéaires et non linéaires ne se comportent pas de la même façon. En effet, si on calcule l'ordre numérique du schéma sur la variable représentant le taux de vide (onde linéaire, figure (8.6)), on constate que cet ordre est proche de 0,59 conformément à l'ordre "théorique" connu à ce jour et qui vaut $\frac{1}{2}$. En revanche, si maintenant l'ordre numérique est obtenu à partir de la vitesse du liquide (onde non linéaire, figure (8.7)), il est proche de 0,8, donc supérieur à celui obtenu à partir d'une onde linéaire.

Il est important de noter qu'avec ce schéma, la non-hyperbolicité du problème ne permet pas de raffiner davantage.

D'autre part, on constate que l'ordre obtenu est le même avec les deux schémas, mais pas la précision (le schéma de Rusanov nécessite un maillage très fin).

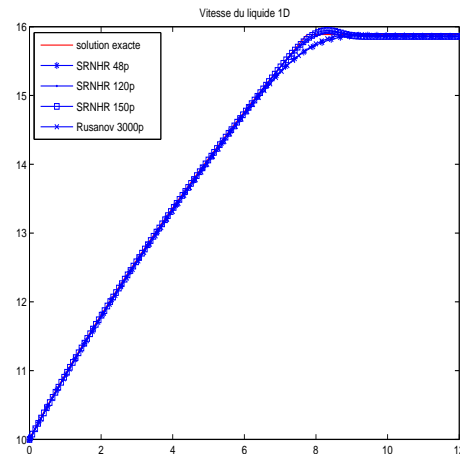
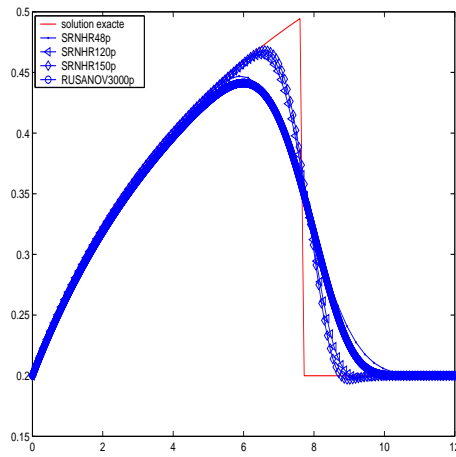


FIG. 8.2 – Variations du taux de vide ; FIG. 8.3 – Vitesse du liquide ; maillages à 48, 120, 150 points ; schéma à 48, 120, 150 points ; schéma SRNHR. $\mu_v = 0.2$.

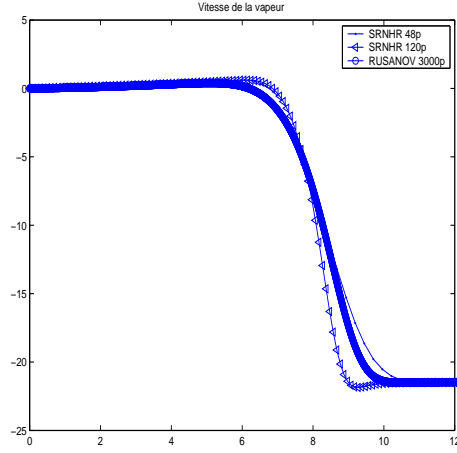


FIG. 8.4 – Vitesse de la vapeur ; comparaison du schéma SRNHR avec celui de Rusanov ($\mu_v = 0.2$).

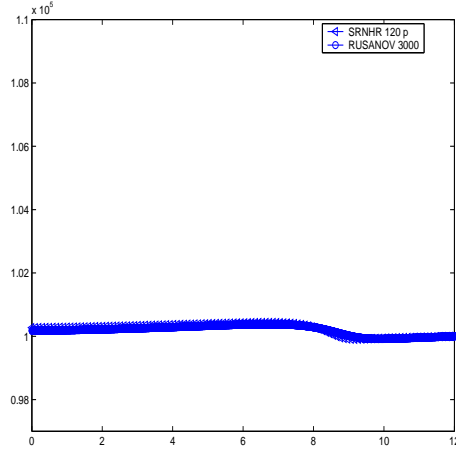


FIG. 8.5 – La pression ; schéma SRNHR comparé avec celui de Rusanov

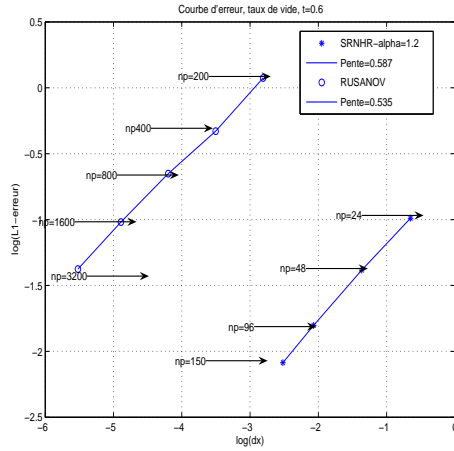


FIG. 8.6 – Courbe d'erreur ; Variation de taux de vide ; schémas SRNHR et de Rusanov ($\mu_v = 0.2$).

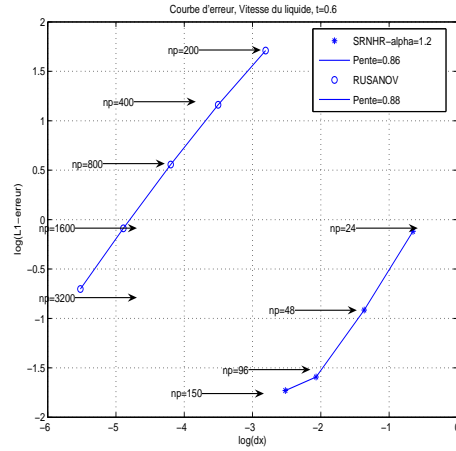


FIG. 8.7 – Courbe d'erreur ; Vitesse du liquide ; schémas SRNHR et de Rusanov ($\mu_v = 0.2$).

– Cas $\mu_v = 0.6$:

En revanche, si on prend pour condition initiale le taux de vide $\mu_v = 0.6$ (comme le préconise [RNT03]), ce problème de non hyperbolicité devient moins important (voir les figures (8.8) et (8.9)).

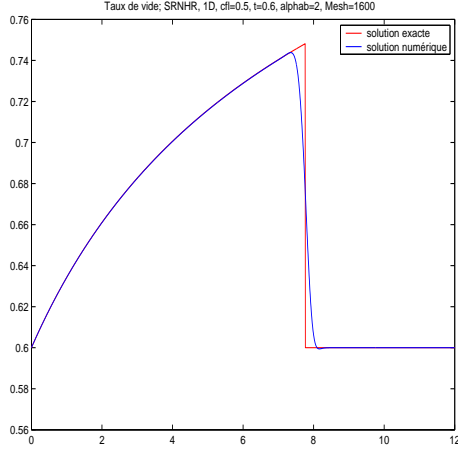


FIG. 8.8 – Taux de vide; schéma SRNHR ($\mu_v = 0.6$), maillage=1600 points.

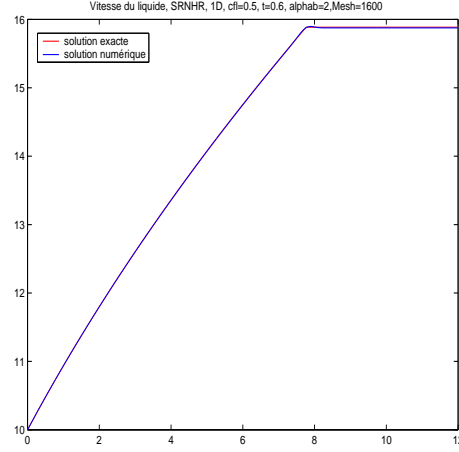


FIG. 8.9 – Vitesse du liquide; schéma SRNHR ($\mu_v = 0.6$), maillage=1600 points.

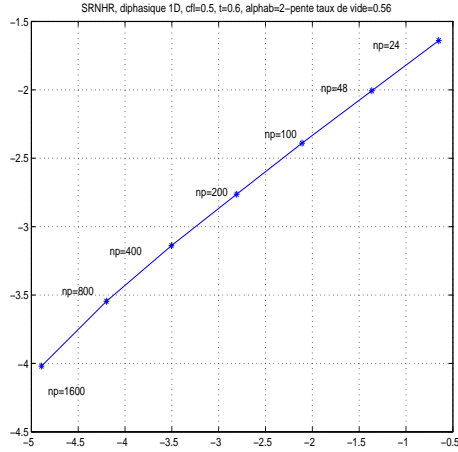


FIG. 8.10 – Courbe d'erreur; taux de vide; schéma SRNHR ($\mu_v = 0.6$).

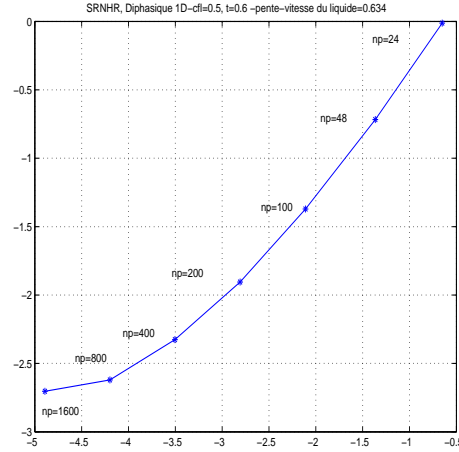
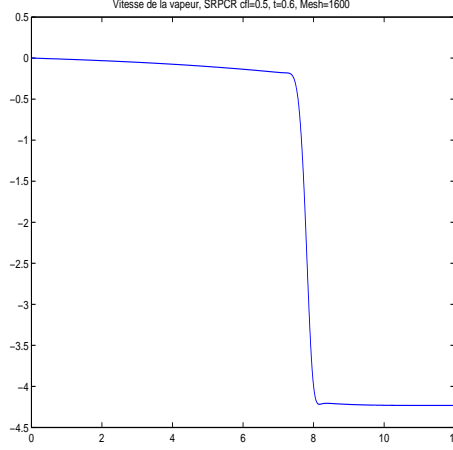


FIG. 8.11 – Courbe d'erreur; vitesse du liquide; schéma SRNHR ($\mu_v = 0.6$).

Pour chaque cas, on a également représenté les courbes d'erreur. On remarque que l'ordre numérique obtenu pour le schéma SRNHR est d'ordre $\frac{1}{2}$ lorsque l'erreur est calculée sur le taux de vide, et d'ordre 0.63 lorsque l'erreur est calculée à partir de la vitesse du liquide (voir figures (8.10), (8.11), (8.6) et (8.7)).

D'autre part, en comparant les résultats obtenus avec les différents schémas, il est intéressant de constater que le résultat donné par le schéma de Rusanov sur un maillage


 FIG. 8.12 – Vitesse de la vapeur ; schéma SRNHR ($\mu_v = 0.6$).

contenant 3000 cellules est comparable à celui obtenu à l'aide du schéma SRNHR, mais sur un maillage ne contenant que 48 cellules.

8.1.4 Discussion sur le choix d'approximation du terme non différentiel

Comme au chapitre précédent et dans le but de préserver les états d'équilibre, on s'intéresse ici au choix de la discrétisation du terme source.

Dans le cas d'un problème diphasique, le schéma SRNHR s'écrit

$$\begin{cases} W_{j+\frac{1}{2}}^n = B_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2S_{j+\frac{1}{2}}^n} [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{\Delta x}{S_{j+\frac{1}{2}}^n} \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n \\ W_j^{n+1} = W_j^n - r \left[F(W_{j+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{j-\frac{1}{2}}^n) \right] + \Delta t^n Q_j^n, \end{cases} \quad (8.6)$$

où $\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n = -\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{(P_{j+1} - P_j)}{\Delta x}$ est l'approximation du terme source dans la phase prédictive, avec $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n$, un état moyen entre μ_j^n et μ_{j+1}^n , à choisir,

et $Q_j^n = -\frac{1}{2\Delta x} (\mu_j^n) (P_{j+1} - P_{j-1})$ est la discrétisation du terme source dans la phase correctrice.

On pose $B_{j+\frac{1}{2}}^n = \nu W_{j+1}^n + (1 - \nu) W_j^n$, avec $\nu \in [0, 1]$. Ici, on a choisi de prendre $\nu = \frac{1}{4}$, au lieu du choix classique $\nu = \frac{1}{2}$, afin d'obtenir de meilleurs résultats numériques. Le choix de ce coefficient ν est lié aux valeurs propres du système étudié. En particulier, ce choix dépend des positions de X^- et de X^+ , introduites au chapitre 3, dans la définition du schéma. Il aurait été intéressant d'approfondir ce choix, en particulier d'étudier les valeurs du paramètre $\nu_{j+\frac{1}{2}}^n$ tel que $B_{j+\frac{1}{2}}^n = \nu_{j+\frac{1}{2}}^n W_{j+1}^n + (1 - \nu_{j+\frac{1}{2}}^n) W_j^n$, ce qui n'est pas réalisé dans le travail présenté ici.

Comparaison des résultats obtenus

On reprend le cas test du problème de Ransom 1D, décrit au paragraphe 5.1.1 de ce chapitre. Les résultats obtenus avec le choix $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\mu_j^n + \mu_{j+1}^n)$ (choix 2), sur le taux de vide sont donnés à la figure (8.2). Si maintenant, on choisit de prendre $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n = \mu_{j+\frac{1}{2}}^n$ (choix 1), calculée à l'étape précédente, on constate que les résultats sont meilleurs (voir figures (8.13) et (8.14)) en particulier, il est possible de raffiner davantage (jusqu'à 400 points). Pour l'équation de Burgers, c'était le choix 2 de définition de $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n$ qui donnait les meilleurs résultats, et pour les équations de Saint-Venant, les deux méthodes donnent le même résultat.

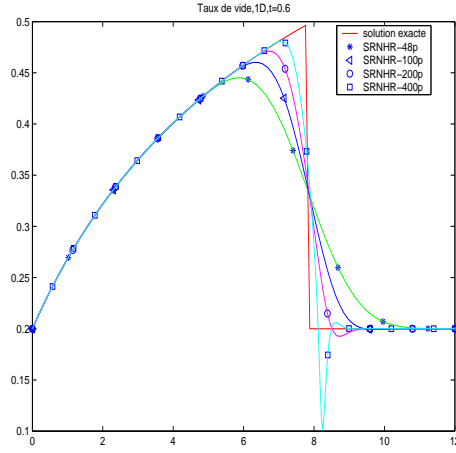


FIG. 8.13 – Taux de vide; schéma SRNHR comparé à la solution analytique; choix 1 ; $\nu = \frac{1}{4}$.

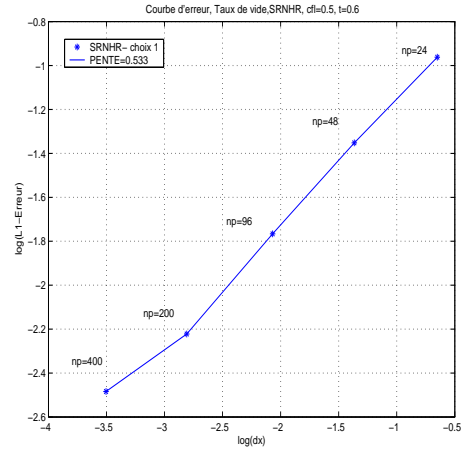


FIG. 8.14 – Courbe d'erreur sur taux de vide; schéma SRNHR; choix 1 ; $\nu = \frac{1}{4}$.

Cas où on choisit le modèle avec pression interfaciale

On considère le système bifluide à pression commune (8.2) pour lequel les termes sources s'écrivent

$$\begin{aligned} Q_1(x, W) &= \begin{pmatrix} 0 & -\mu_v \frac{\partial P}{\partial x} - (P - P_i) \frac{\partial \mu_v}{\partial x} & 0 & -\mu_l \frac{\partial P}{\partial x} - (P - P_i) \frac{\partial \mu_l}{\partial x} \end{pmatrix}^t, \\ Q_2(x, W) &= (0 \quad \mu_v \rho_v g \quad 0 \quad \mu_l \rho_l g)^t, \end{aligned} \quad (8.7)$$

avec $P - P_i = \rho_v(u_v - u_l)^2$, la pression interfaciale ; elle joue un rôle très important puisque ce terme permet de rendre ce système hyperbolique (voir [Ami97] et [Mim99]).

De nouveau, on compare, toujours sur le même cas test, les résultats obtenus avec les deux choix proposés pour la détermination de $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n$.

Les figures (8.15) et (8.16) correspondent au choix 1 : $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n = \mu_{j+\frac{1}{2}}^n$ et les figures (8.17) et (8.18) au choix 2 : $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\mu_j^n + \mu_{j+1}^n)$. On a également pris ici $B_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4}W_{j+1}^n + \frac{3}{4}W_j^n$. Le choix 2 donne, dans ce cas encore, de meilleurs résultats.

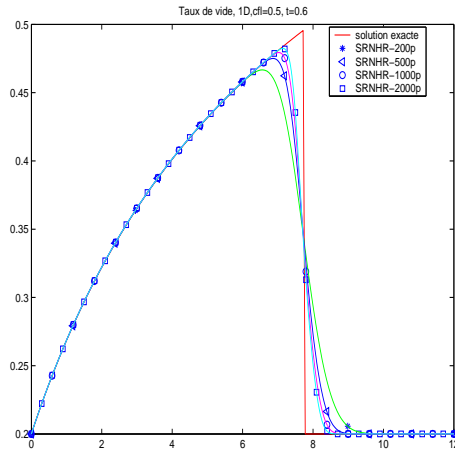


FIG. 8.15 – Taux de vide (avec pression interfaciale) ; schéma SRNHR ; choix 1 ; $\nu = \frac{1}{4}$.

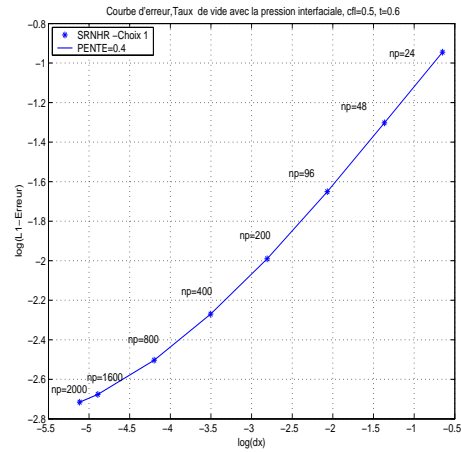


FIG. 8.16 – Courbe d'erreur sur taux de vide (avec pression interfaciale) ; schéma SRNHR ; choix 1 ; $\nu = \frac{1}{4}$.

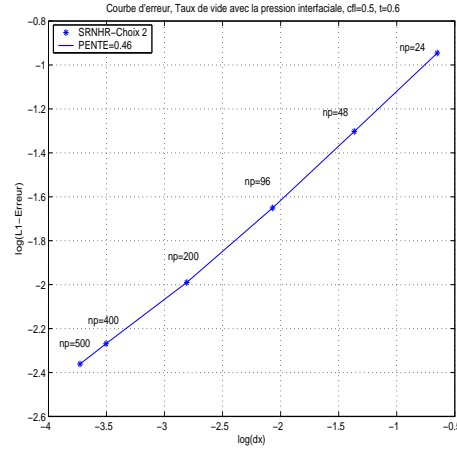
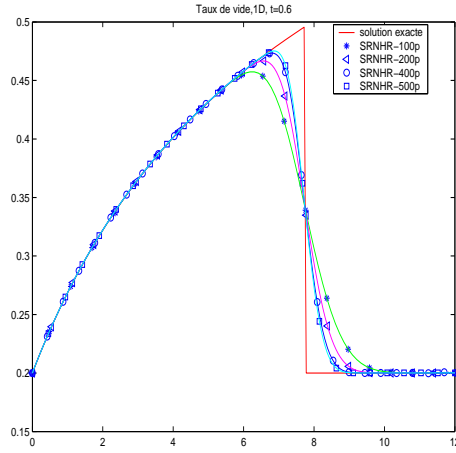


FIG. 8.17 – Taux de vide (avec pression interfaciale) ; schéma SRNHR ; choix 2 ; de vide (avec pression interfaciale) ; schéma SRNHR ; choix 2 ; $\nu = \frac{1}{4}$.

Commentaires :

1. Lorsque l'on choisit de prendre le choix 1 : $\mu_{j+\frac{1}{2}}^n$ calculé à l'étape prédicteur, on peut raffiner le maillage jusqu'à 400 points pour le modèle sans pression interfaciale. Le fait de rajouter ce terme de pression interfaciale, permet de raffiner "autant qu'on le souhaite"; les résultats numériques donnés par le schéma SRNHR sont identiques à partir de 2000 points.
2. Si maintenant on choisit de prendre $B_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_j^n + W_{j+1}^n)$ dans l'étape prédicteur, pour le modèle à pression interfaciale, on obtient de bons résultats (voir figures (8.19) et (8.20)). En particulier, dans le cas où on utilise le choix $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\mu_{j+1}^n + \mu_j^n)$, il est possible de raffiner le maillage jusqu'à 500 points.
3. Les calculs présentés ici ont été réalisés sur des modèles 1D ; le fait de rajouter ce terme de pression interfaciale n'a pas d'incidence en 2D.

Le tableau suivant résume les différents cas observés :

	Choix 2 : $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\mu_j^n + \mu_{j+1}^n)$	Choix 1 : $\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}^n = \mu_{j+\frac{1}{2}}^n$
Modèle sans pression interfaciale	Raffinement jusqu'à 150 points	Raffinement jusqu'à 400 points
Modèle avec pression interfaciale	Raffinement jusqu'à 500 points	Raffinement jusqu'à 2000 points

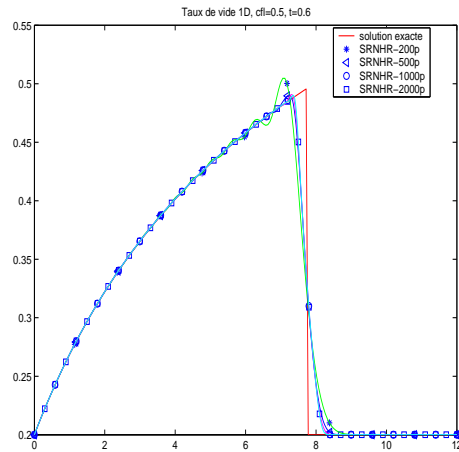


FIG. 8.19 – Taux de vide (avec pression interfaciale) ; Choix 1 ; $\nu = \frac{1}{2}$.

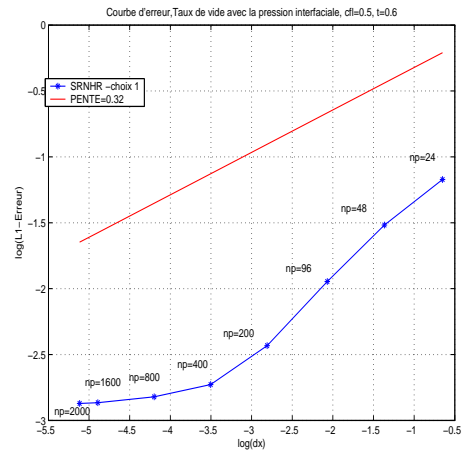


FIG. 8.20 – Courbe d'erreur sur taux de vide (avec pression interfaciale) ; schéma SRNHR ; choix 1 ; $\nu = \frac{1}{2}$.

8.2 Problème diphasique bidimensionnel en maillage triangulaire

Pour déterminer un schéma aux volumes finis permettant la résolution approchée du système (8.1), on utilise une technique classique de splitting d'opérateur (voir, par exemple, [Yan68] ou [Ben02]) : on décompose ce système en deux sous-systèmes

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = Q_2(x, y, \tilde{W}) \\ \tilde{W}(x, y, t^n) = W^n(x, y) \end{cases} \quad (8.8)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = Q_1(x, y, W) \\ W(x, y, t^n) = \tilde{W}^{n+1}(x, y). \end{cases} \quad (8.9)$$

Une des difficultés numériques liées à la résolution du système (8.9) réside dans le traitement du terme non conservatif, c'est-à-dire du terme source $Q_1(x, y, W)$.

Pour cela, s'inspirant des travaux de Abgrall, Nkonga et Saurel [ANS03], on utilise la projection du système sur la normale à l'interface d'une maille et on obtient, pour chacune des deux phases

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mu \rho U}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \mu \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \mu \rho U^2}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \mu \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \mu \rho UV}{\partial \eta} = 0, \end{cases} \quad (8.10)$$

où $U = \vec{v} \cdot \vec{\eta}$ est la projection de $\vec{v} = (u \ v)^t$ sur la normale à l'interface $\vec{\eta} = (n_x \ n_y)^t$ et $V = \vec{v} \cdot \vec{\eta}^\perp$ est la projection de $\vec{v} = (u \ v)^t$ sur le vecteur tangentiel $\vec{\eta}^\perp = (-n_y \ n_x)^t$.

8.2.1 Problème de Ransom 2D

Decription du cas :

L'extension bidimensionnelle que nous avons introduite ne consiste pas à calculer l'écoulement à phase séparée, représentatif de la situation du robinet et correspondant au cas 1D ; nous avons repris les mêmes conditions d'entrée en les appliquant uniformément à toute la section d'entrée. Les conditions initiales sont obtenues par translations des conditions d'entrée dans le domaine de calcul. L'interprétation physique de cette configuration, que nous avons baptisé "robinet de Ransom homogène" est donc différente du cas 1D originel

et n'a donc plus une grande interprétation physique.

8.2.2 Conditions de calcul

Maillage : On utilise des maillages structurés, comme ceux présentés figures (8.21) à (8.24), formés de triangles, de dimensions 24×10 puis 48×10 .

Le schéma : On utilise le schéma SRNHR.

Pas de temps : Il est déterminé en fonction de la condition de stabilité donnée dans ([Sah05]), déterminée dans le cas homogène par

$$\Delta t \max_i \left(\frac{|\delta c_i|}{A_i} \right) \left[1 + \alpha \frac{M}{m} \right] \frac{M}{2} = cfl \leq 1,$$

avec $M = \max_{i,j} (S_{ij}^n)$ et $m = \min_{i,j} (s_{ij}^n)$, S_{ij}^n , A_i et $|\delta c_i|$ étant respectivement la vitesse de Rusanov, l'aire et le périmètre de la cellule i .

Les conditions initiales sont définies par

$$\begin{aligned} \mu_v(t=0) &= 0.6, \\ u_l(t=0) &= 10, \\ v_l(t=0) &= 0, \\ u_v(t=0) &= 0, \\ v_v(t=0) &= 0, \\ p(t=0) &= 10^5, \\ \rho_v(t=0) &= 1, \\ \rho_l(t=0) &= 988,0638, \end{aligned}$$

et les conditions de bords par

$$\begin{aligned} \mu_v(0, t) &= 0.6, \\ u_l(0, t) &= 10, \\ v_l(0, t) &= 0, \\ u_v(0, t) &= 0, \\ v_v(0, t) &= 0, \\ p(12, t) &= 10^5. \end{aligned}$$

Sur l'approximation du terme non conservatif :

Dans un premier temps, comme dans le cas des équations de Saint-Venant, on a utilisé, dans l'étape correcteur, la méthode de Grenn (les notations sont les mêmes que celles du chapitre précédent). Dans la direction x , cela s'écrit

$$-\int_{c_i} \mu \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = -\mu_i \int_{\delta c_i} P_i \cdot (n_{ij})_x d\sigma = -\mu_i \sum_{j=1}^{j=3} P_{ij} \cdot (n_{ij})_x \cdot mes(\Gamma_{ij}),$$

où μ_i est la valeur du taux de présence sur la cellule c_i , P_{ij} est une interpolation linéaire entre P_i et P_j donnée par

$$P_{ij} = \frac{P_i A_i + P_j A_j}{A_i + A_j}.$$

Le traitement du terme source dans la direction y , se fait de façon analogue.

Cette méthode, qui donnait de bons résultats dans le cas monophasique (cas des équations de Saint-Venant non homogènes) semble ne pas être adaptée dans le cas de problèmes diphasiques, puisqu'avec cette méthode le schéma diverge. C'est ce constat qui nous a incité à effectuer l'étude théorique de l'approximation des gradients sur des maillages non uniformes de dimension un, présentés au chapitre (5).

On a donc eu recours à une autre méthode pour calculer le terme source :

$$\int_{c_i} -\mu \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = -\mu_i A_i \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{c_i},$$

et pour calculer la quantité $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i$, on utilise la méthode des moindres carrés, décrite au chapitre (4).

Le tableau suivant permet de synthétiser les résultats numériques obtenus avec ces méthodes, sur différents problèmes (ces résultats dépendent bien entendu du maillage choisi) :

	Méthode de Green	Méthode des moindres carrés
Saint-Venant	Bonne convergence	Non testé
$\alpha_v = 0,6$	Maillage DA (24×10) et (48×10) ; calcul jusqu'à $t = 0,6$	Maillage Biaisé et DA (24×10) ; calcul jusqu'à $t = 0,6$ Maillage NS (100×10) ; calcul jusqu'à $t = 0,4$
$\alpha_v = 0,2$	Explose	Maillage structuré ; calcul jusqu'à $t = 0,26$ Maillage non structuré ; explose

8.2.3 Résultats numériques

On réalise les calculs en utilisant les maillages suivants :

8.2. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE TRIANGULAIRE

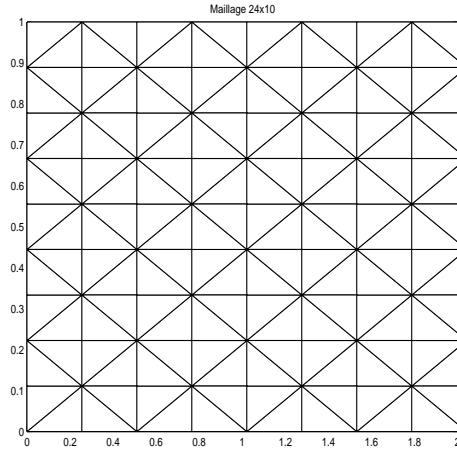


FIG. 8.21 – DA 24×10 .

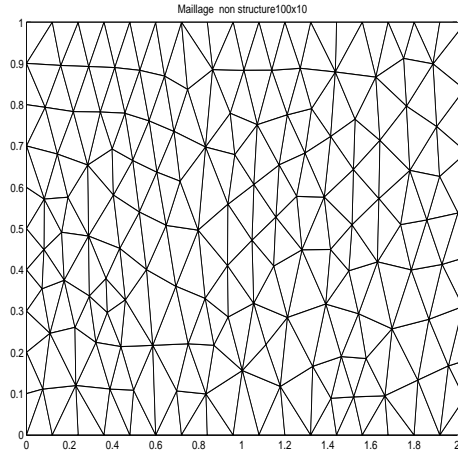


FIG. 8.22 – NS 100×10 .

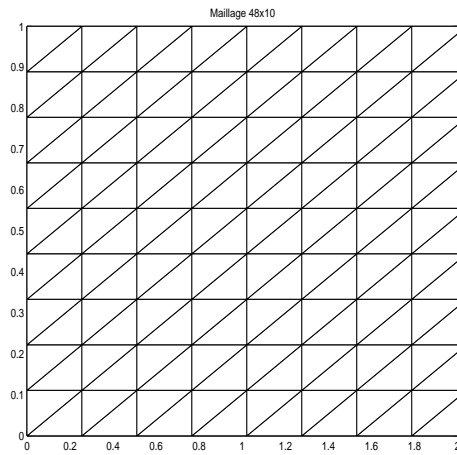


FIG. 8.23 – Biaisé 48×10 .

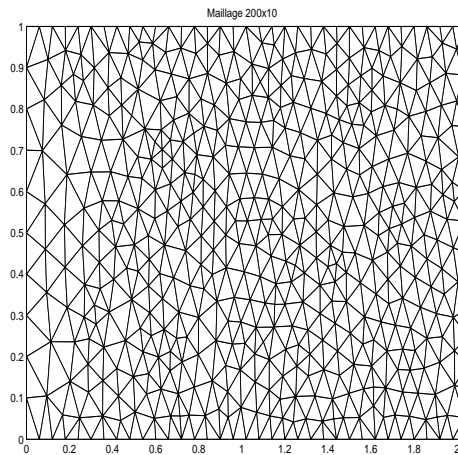


FIG. 8.24 – NS 200×10 .

Cas test 1, maillage Biaisé 24×10 : On effectue la simulation numérique du problème de Ransom 2D avec le maillage structuré 24×10 présenté figure (8.23), et les conditions initiales et limites décrites ci-dessus. On utilise le schéma SRNHR à $cfl = 0.3$. Les résultats sont donnés à $t = 0.618$.

Les figures (8.25) et (8.26) montrent, en coupe 1D, la comparaison de la solution obtenue avec la solution exacte.

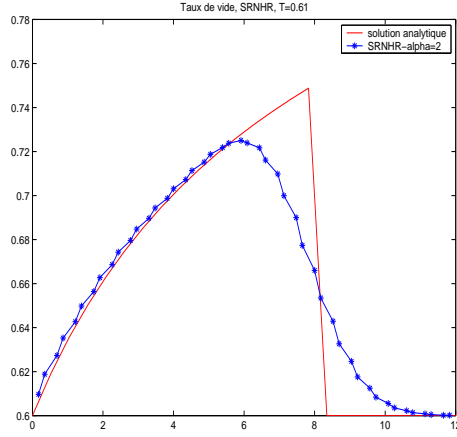


FIG. 8.25 – Taux de vide; solution schéma SRNHR et solution exacte; maillage structuré 24×10 .

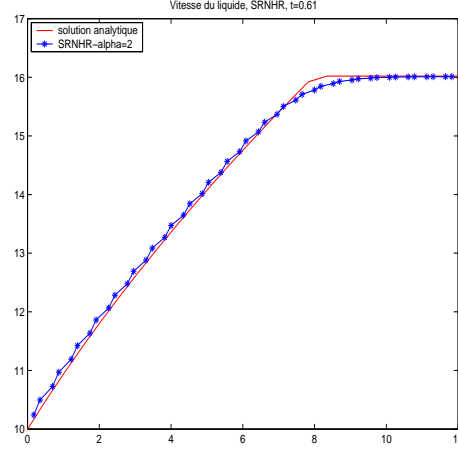


FIG. 8.26 – Vitesse du liquide; solution schéma SRNHR et solution exacte; maillage structuré 24×10 .

On constate que le profil du taux de vide et de la vitesse du liquide (figures (8.27) et (8.29)) ainsi que les isovaleurs (figures (8.28) et (8.30)) donnent des résultats comparables à la solution exacte connue dans le cas monodimensionnel. En effet, on peut constater que les isovaleurs sont parallèles, sauf éventuellement aux bords, ce problème provenant du choix du maillage.

La figure (8.31) montre que la pression reste quasi-constante, ce qui est conforme au résultat attendu.

La figure (8.32) montre que la vitesse du liquide est comparable à celle obtenue dans le cas 1D, car les champs de vitesse sont parfaitement parallèles. C'est la raison pour la vitesse du liquide est stable.

La figure (8.33) montre que la vitesse de la vapeur est nulle à l'entrée et négative à la sortie. On constate néanmoins que ces vecteurs ne sont pas tout à fait parallèles, ce qui peut être la cause d'instabilités de la vitesse de la vapeur.

8.2. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE TRIANGULAIRE

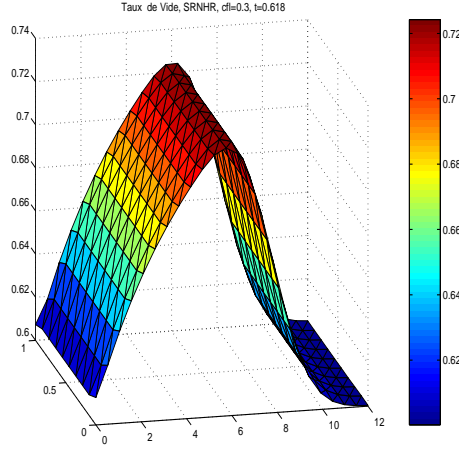


FIG. 8.27 – Taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

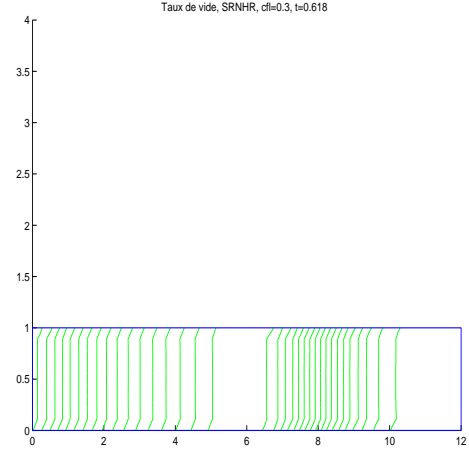


FIG. 8.28 – Isovaleurs du taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

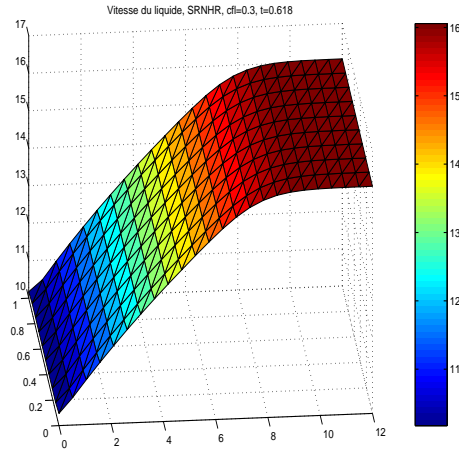


FIG. 8.29 – Vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

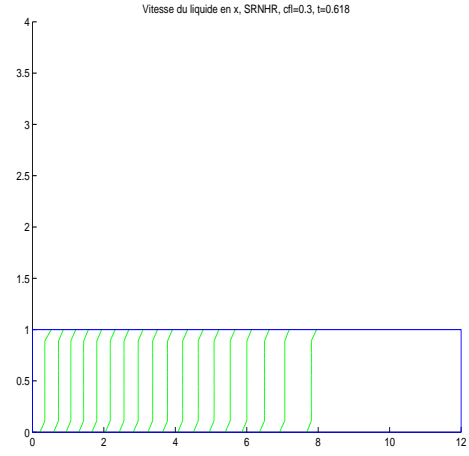


FIG. 8.30 – Isovaleurs de la vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

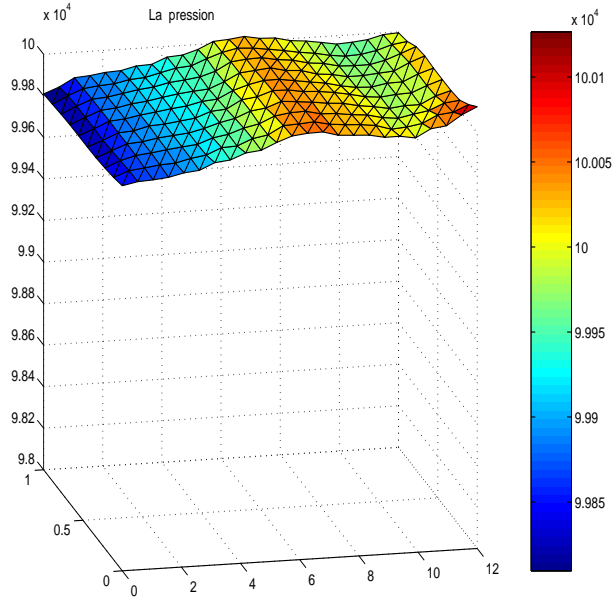


FIG. 8.31 – Pression ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

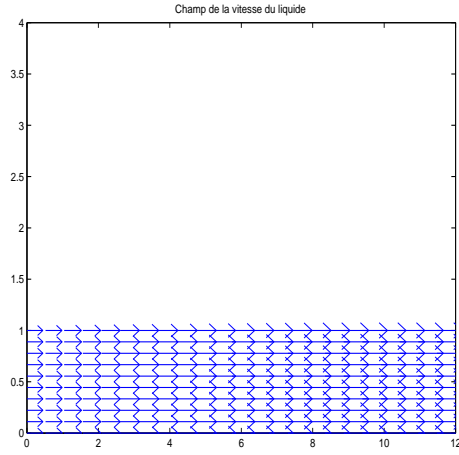


FIG. 8.32 – Champs de vitesse du liquide ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

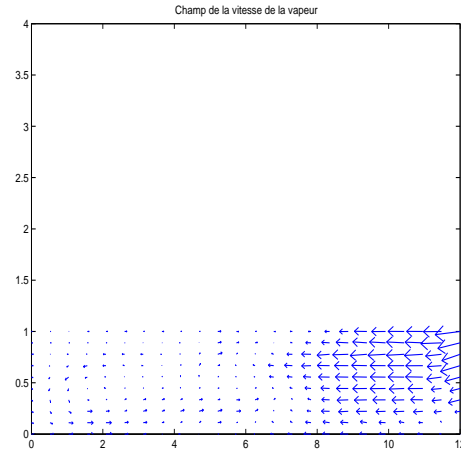


FIG. 8.33 – Champs de vitesse de la vapeur ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

8.2. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE TRIANGULAIRE

Cas test 1, maillage NS 100×10 :

Les figures suivantes montrent les résultats obtenus mais dans le cas d'un maillage non structuré maintenant, de taille 100×10 , présenté figure (8.22). Les résultats sont obtenus à $t = 0,4s$.

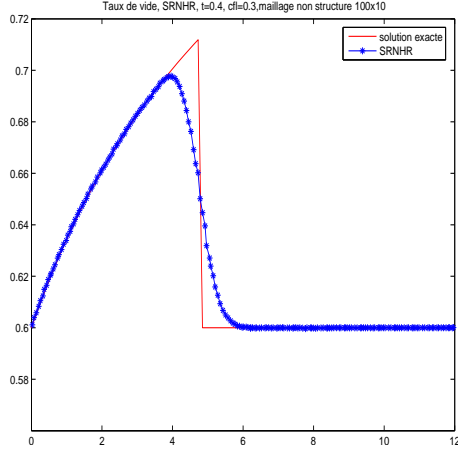


FIG. 8.34 – Taux de vide; solution schéma SRNHR et solution exacte; avec maillage non structuré 100×10 .

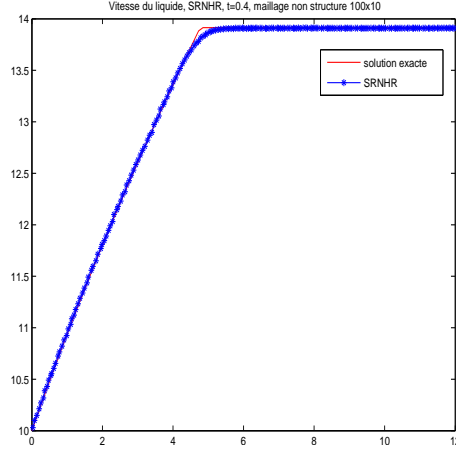


FIG. 8.35 – Vitesse du liquide; solution schéma SRNHR et solution exacte; avec maillage non structuré 100×10 .

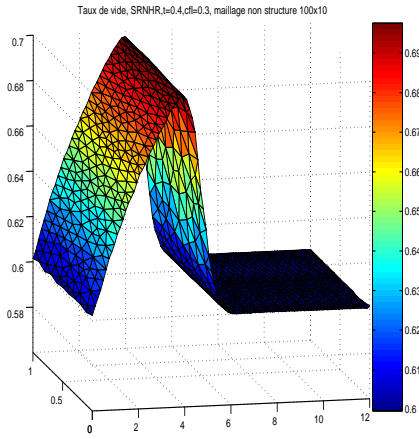


FIG. 8.36 – Taux de vide; schéma SRNHR; maillage non structuré 100×10 .

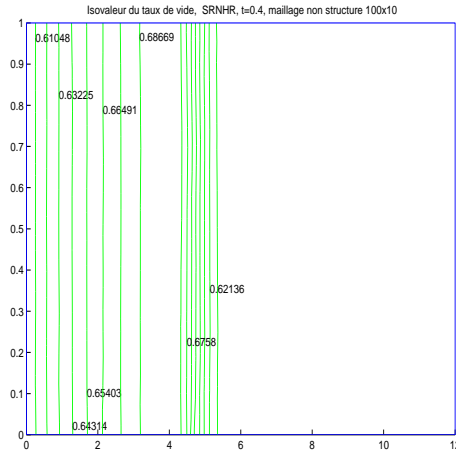


FIG. 8.37 – Isovaleurs du taux de vide; schéma SRNHR; maillage non structuré 100×10 .

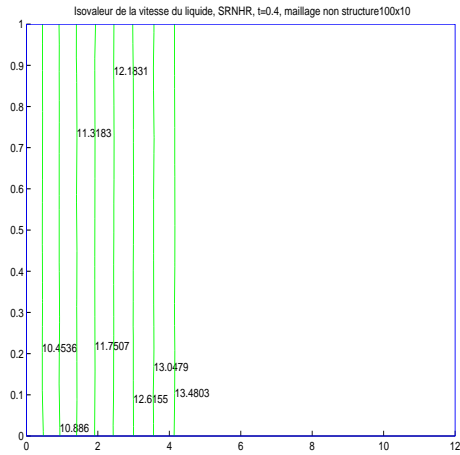
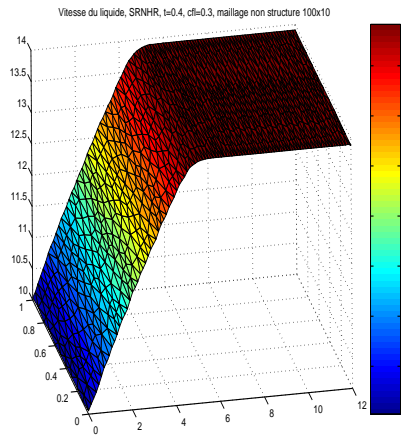


FIG. 8.38 – Vitesse du liquide ; schéma SRNHR ; maillage non structuré 100×10 .

FIG. 8.39 – Isovaleurs de la vitesse du liquide ; schéma SRNHR ; maillage non structuré 100×10 .

Résultats du cas test 1 avec un maillage drapeau anglais 24×10 en utilisant la méthode des moindres carrés pour le terme source non homogène

Les calculs sont réalisés en utilisant le maillage DA 24×10 (8.21).

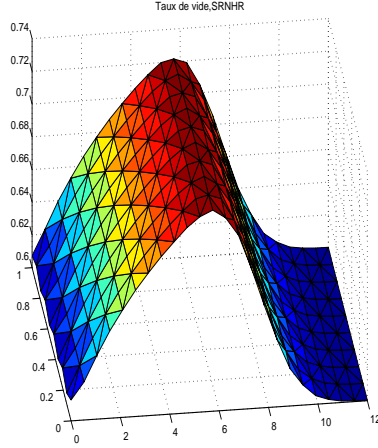


FIG. 8.40 – Taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode des moindres carrés.

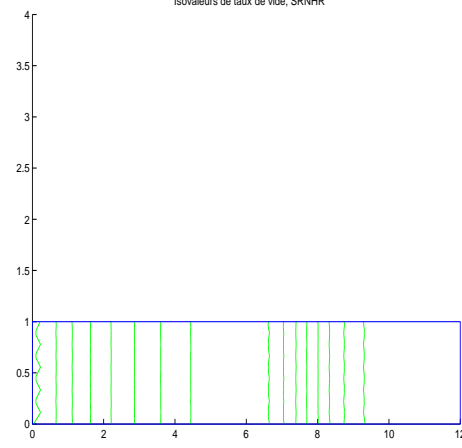


FIG. 8.41 – Isovaleurs de taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode des moindres carrés.

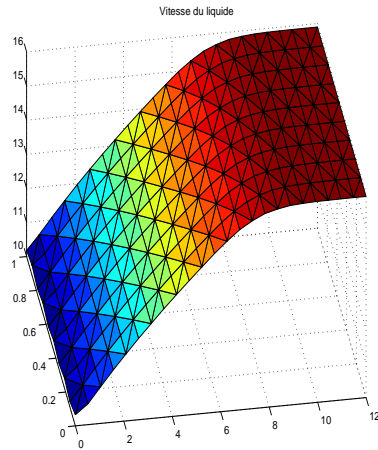


FIG. 8.42 – Vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode des moindres carrés.

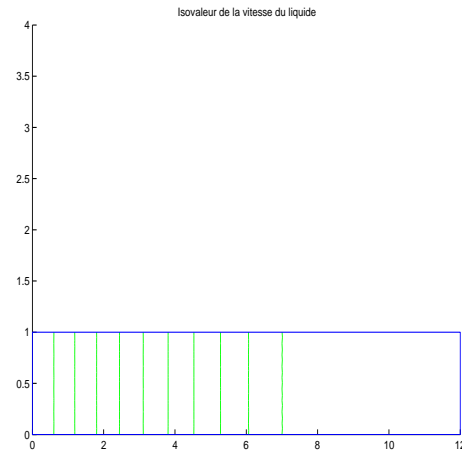


FIG. 8.43 – Isovaleurs de la vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode des moindres carrés.

Résultats du cas test 1 avec un maillage drapeau anglais 24×10 en utilisant la méthodes de Green pour le terme source non homogène

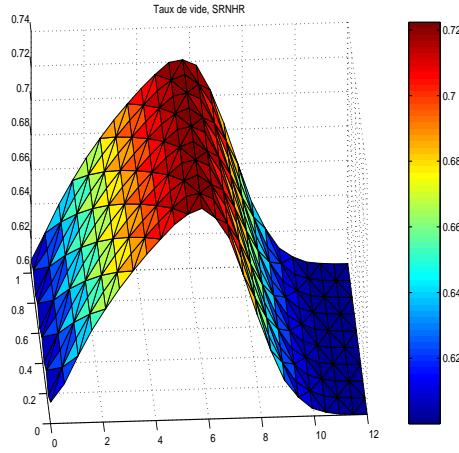


FIG. 8.44 – Taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode de Green.

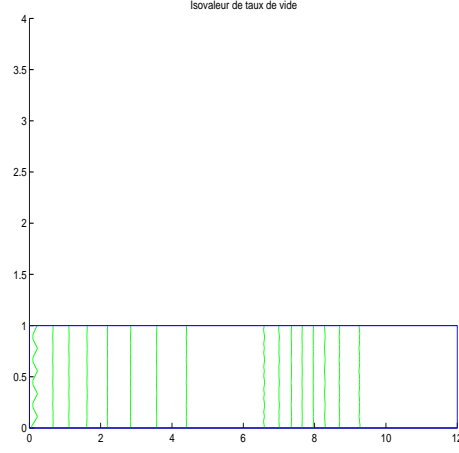


FIG. 8.45 – Isovaleurs du taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode de Green.

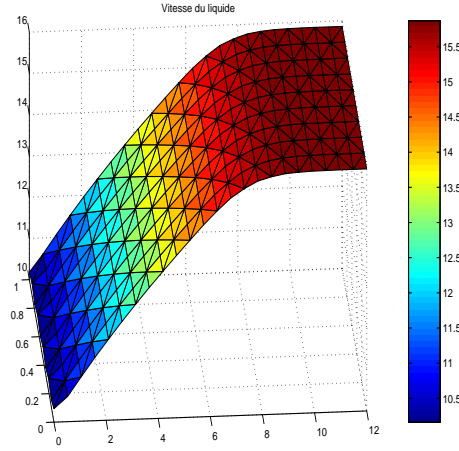


FIG. 8.46 – Vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode de Green.

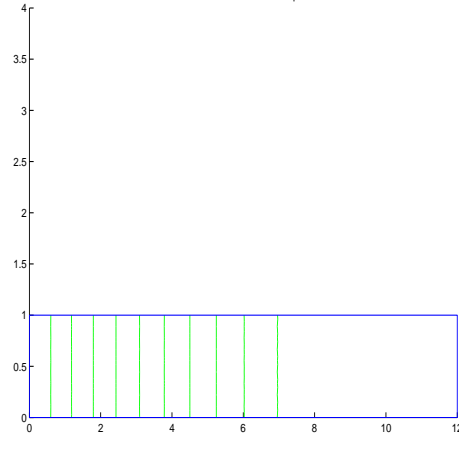


FIG. 8.47 – Isovaleurs de la vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21); méthode de Green.

Résultats du cas test 1 avec un maillage drapeau anglais 48×10 en utilisant la méthodes de Green pour le terme source non homogène

Ici, les calculs sont effectués sur le maillage (8.21) raffiné (48×10).

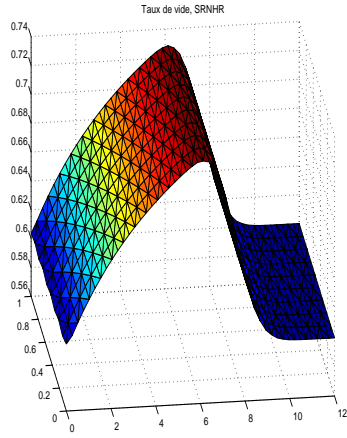


FIG. 8.48 – Taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21) raffiné; méthode de Green.

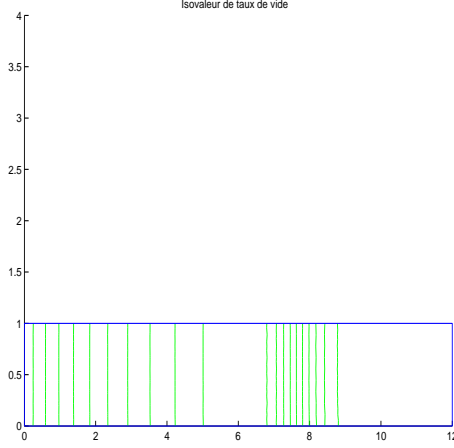


FIG. 8.49 – Isovaleurs du taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21) raffiné; méthode de Green.

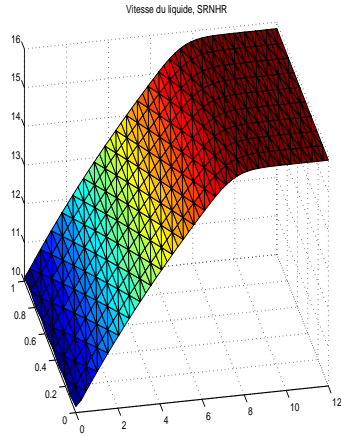


FIG. 8.50 – Vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21) raffiné; méthode de Green.

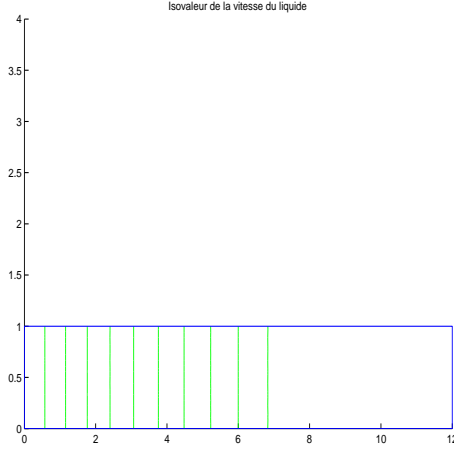


FIG. 8.51 – Isovaleurs de la vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = 2$), maillage (8.21) raffiné; méthode de Green.

Cas test 2 : On considère à présent le même cas test que précédemment dans lequel on ne change que le taux de vide initial.

Si on choisit de prendre $\mu_v = 0.2$, le schéma ne fonctionne pas en l'état, à partir d'un temps physique $t = 0,25$ s, sur le maillage dy type (8.23), de dimension 24×10 .

Cependant, si on impose que les vitesses de la vapeur et du liquide dans la direction y sont nulles, on obtient des résultats semblables au cas monodimensionnel. Pour ce cas test, on donne les résultats obtenus avec d'une part le schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant) et d'autre part, le schéma de Rusanov sur lequel on a effectué une montée en ordre en utilisant la méthode MUSCL.

1. Avec le schéma SRNHR :

Le calcul est réalisé avec le même maillage structuré (8.23) que précédemment mais de dimension 48×10 , à $cfl = 0.3$; les résultats sont donnés au temps $t = 0.6$ (figures (8.52), (8.53), (8.54), (8.55), (8.56) et (8.57)).

La figure (8.52) représente le profil du taux de vide qui est semblable à celui correspondant au cas 1D, comme le confirment les isovaleurs (rectilignes) de la figure (8.53).

Les figures (8.54) et (8.55) montrent que la vitesse du liquide et de la vapeur sont comparables à celles obtenues dans le cas monodimensionnel. Enfin, la figure (8.56) montre que la pression est constante et ses isovaleurs sont parallèles (figure (8.57)). De nouveau, ces résultats sont comparables à ceux obtenus dans le cas 1D.

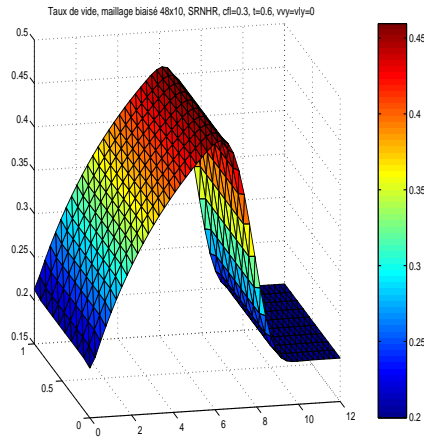


FIG. 8.52 – Taux de vide; schéma SRNHR; $\mu_v = 0.2$.

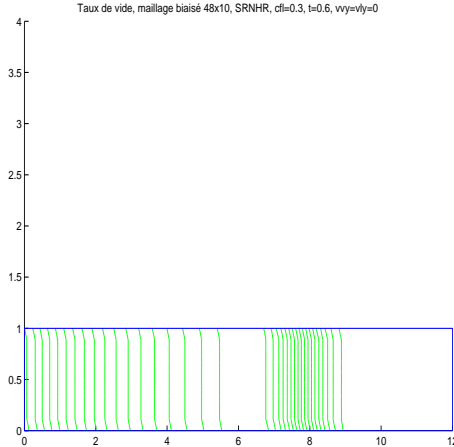


FIG. 8.53 – Isovaleurs du taux de vide; schéma SRNHR; $\mu_v = 0.2$.

8.2. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE TRIANGULAIRE

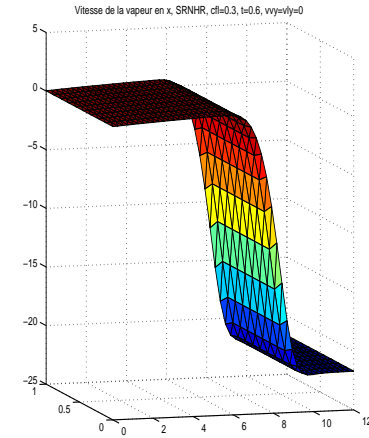
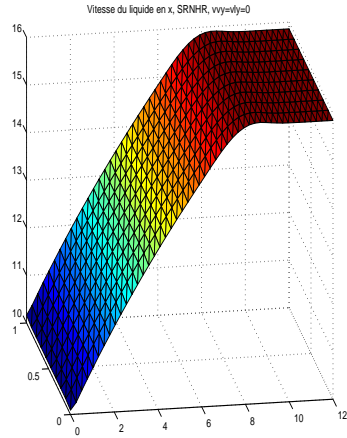


FIG. 8.54 – Vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR; $\mu_v = 0.2$. FIG. 8.55 – Vitesse de la vapeur dans la direction x ; schéma SRNHR; $\mu_v = 0.2$.

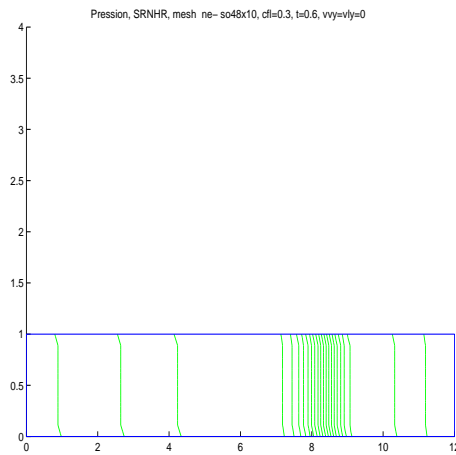
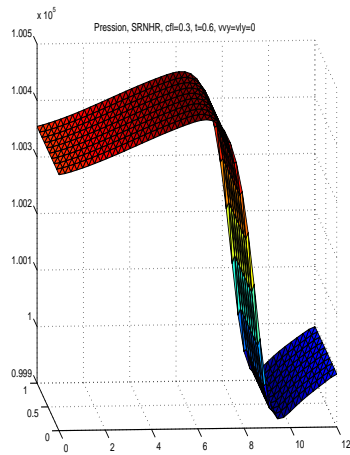


FIG. 8.56 – Pression; schéma SRNHR; $\mu_v = 0.2$. FIG. 8.57 – Isovaleurs de la pression; schéma SRNHR; $\mu_v = 0.2$.

2. Schéma de Rusanov avec MUSCL :

A titre de comparaison, on utilise ici le schéma de Rusanov auquel on a appliqué la méthode MUSCL : les gradients sont calculés en utilisant la méthode des moindres carrés, limités par le limiteur Min-Mod. On a gardé un schéma d'ordre un en temps. Le calcul est réalisé ici avec le maillage non structuré 200×10 présenté figure (8.24), à $cfl = 0.3$ et les résultats sont donnés au temps $t = 0.604s$.

On constate que les profils du taux de vide et de la vitesse de liquide (figures (8.58) et (8.60)) ainsi que les isovaleurs sont parallèles (figures (8.59) et (8.61)) ; ces résultats sont comparables avec ceux obtenus dans le cas monodimensionnel, mais ce schéma est cependant très diffusif.

Les figures (8.64), (8.65), (8.62) et (8.63) montrent la pression ainsi que la vitesse de la vapeur.

8.2. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE TRIANGULAIRE

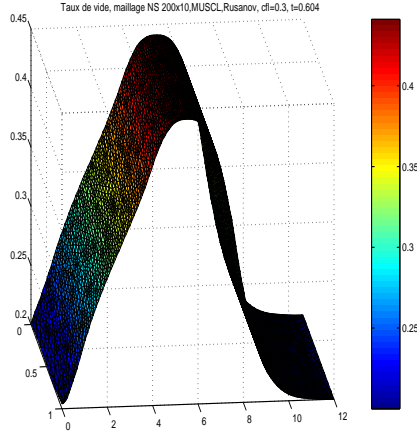


FIG. 8.58 – Taux de vide 2D ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

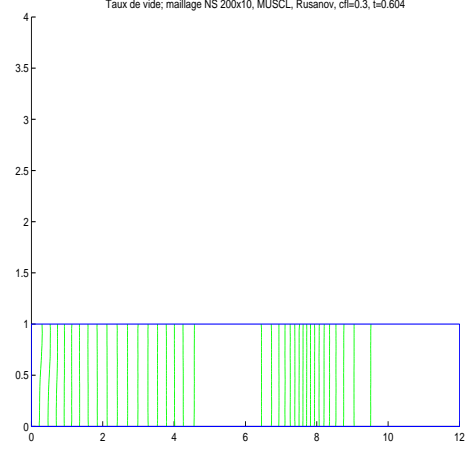


FIG. 8.59 – Isovaleurs du taux de vide ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

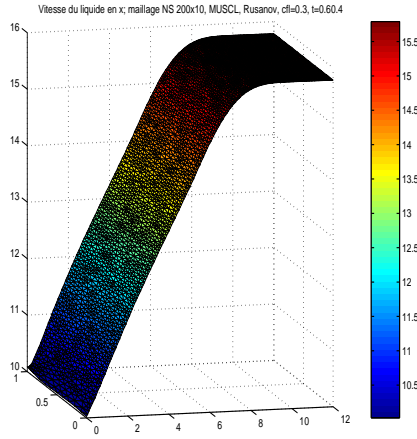


FIG. 8.60 – Vitesse du liquide dans la direction x ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

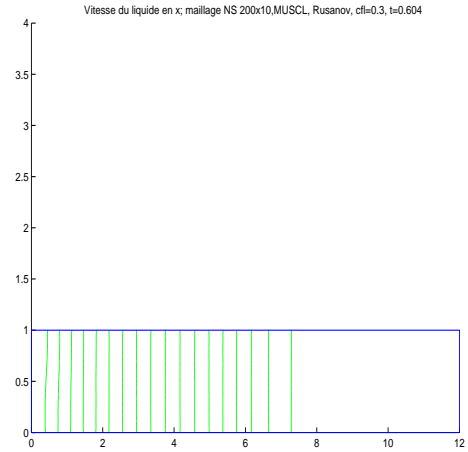


FIG. 8.61 – Isovaleurs de la vitesse du liquide dans la direction x ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

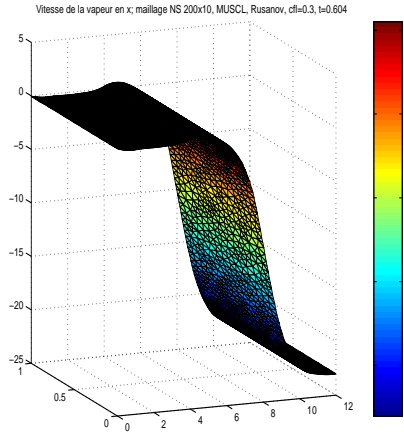


FIG. 8.62 – Vitesse de la vapeur dans la direction x ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

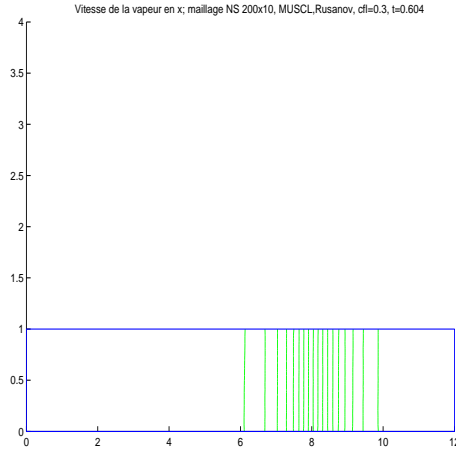


FIG. 8.63 – Isovaleurs de la vitesse de la vapeur dans la direction x ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

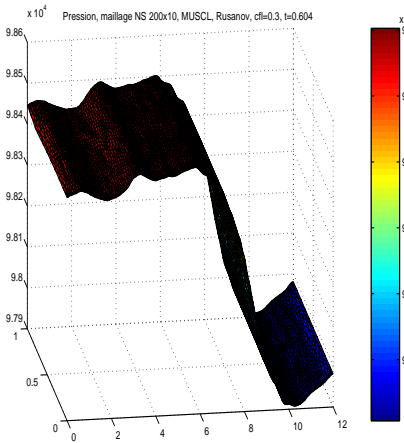


FIG. 8.64 – Pression ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

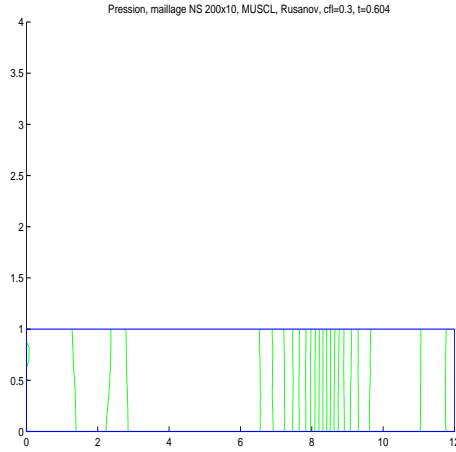


FIG. 8.65 – Isovaleurs de la pression ; schéma de Rusanov avec MUSCL ; $\mu_v = 0.2$.

8.3 Problème diphasique bidimensionnel en maillage quadrangulaire

Nous proposons dans cette partie de présenter le comportement du schéma *SRNHR* dans un cas diphasique raide, lorsque l'on utilise un maillage quadrangulaire structuré et non plus triangulaire.

Le code en volumes finis structurés, utilisé ici, a été présenté notamment dans la thèse de Imad Elmahi ([Elm99]). Il suppose une structure de données où les mailles sont des quadrilatères, et le maillage éventuellement non uniforme, ou même non orthogonal.

La stratégie de calcul repose sur une évaluation des flux numériques, se faisant uniquement

8.3. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE QUADRANGULAIRE

sur les frontières nord et est d'une cellule donnée. Les flux sont par la suite distribués sur les cellules de part et d'autre de la frontière en question.

Ainsi, si on intègre les équations (2.5) sur une cellule c_{ij} du domaine en espace, on aura

$$\int_{c_{ij}} U_t \cdot dv + \int_{\partial c_{ij}} (F(u) \cdot n_x + G(U) \cdot n_y) d\sigma = \int_{c_{ij}} Q(x, y, U) \cdot dv \quad (8.11)$$

Dans ce cas la formulation volumes finis se poursuit ainsi. Nous avons pour la frontière de la cellule (i, j) la relation suivante

$$\partial c_{ij} = \partial c_{ij}^{Nord} \cup \partial c_{ij}^{Sud} \cup \partial c_{ij}^{Est} \cup \partial c_{ij}^{Ouest},$$

Nous pouvons alors écrire (8.11) sous la forme :

$$\int_{c_{ij}} U_t \cdot dv + \sum_{k=N,S,E,O} \int_{\partial c_{ij}^k} (F \cdot n_{ijx}^k + G \cdot n_{ijy}^k) d\sigma = \int_{c_{ij}} Q \cdot dv. \quad (8.12)$$

Or les ∂c_{ij}^k sont rectiligne et donc \vec{n} est constant sur chaque morceau ∂c_{ij}^k de la frontière de la cellule c_{ij} . on a alors :

$$\int_{c_{ij}} U_t \cdot dv + \sum_{k=N,S,E,O} \left(n_{ijx}^k \int_{\partial c_{ij}^k} F + n_{ijy}^k \int_{\partial c_{ij}^k} G \right) d\sigma = \int_{c_{ij}} Q \cdot dv. \quad (8.13)$$

L'hypothèse que U est C^0 par morceaux, nous amène à chercher des approximations des flux physiques F et G le long des frontières, ce qui se fait via le schéma volume finis considéré. Nous pouvons alors écrire :

$$Aire(c_{ij}) \cdot U_{tij} + \sum_{k=N,S,E,O} \left(n_{ijx}^k \cdot F_{ij}^k + n_{ijy}^k \cdot G_{ij}^k \right) \cdot \int_{\partial c_{ij}^k} d\sigma = \int_{c_{ij}} Q \cdot dv. \quad (8.14)$$

où nous avons noté F_{ij}^k et G_{ij}^k les estimations de F et G sur le morceau de la frontière de la cellule c_{ij} d'indice k . Le terme integral n'est autre que la longueur (orientée) de ∂c_{ij}^k .

Nous avons donc :

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n - \frac{\Delta t^n}{Aire(c_{ij})} \sum_{k=N,S,E,O} \left(N_{ijx}^k \cdot F_{ij}^k + N_{ijy}^k \cdot G_{ij}^k \right) + \Delta t^n Q_{ij}^n \quad (8.15)$$

avec $N_{ij}^k = (N_{ijx}^k, N_{ijy}^k)$ le vecteur normal extérieur à ∂c_{ij}^k de norme la longueur de ∂c_{ij}^k , ou encore

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n - \frac{\Delta t^n}{Aire(c_{ij})} \sum_{k=N,S,E,O} \Phi_{ij}^k + \Delta t^n Q_{ij}^n \quad (8.16)$$

ce qui implique

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n - \frac{\Delta t^n}{Aire(c_{ij})} \left(\Phi_{ij}^{Nord} + \Phi_{ij}^{Sud} + \Phi_{ij}^{Est} + \Phi_{ij}^{Ouest} \right) + \Delta t^n Q_{ij}^n \quad (8.17)$$

avec $Q_{ij}^n = \frac{1}{Aire(c_{ij})} \int_{c_{ij}} Q(x, y, U) \cdot dv$ et $\Phi_{ij}^k = \left(N_{ijx}^k \cdot F_{ij}^k + N_{ijy}^k \cdot G_{ij}^k \right)$ est le flux numérique.

Pour ne pas calculer donc plusieurs fois un même flux, on remarque qu'un flux sortant d'une cellule est un flux entant dans une cellule voisine. Dans notre cas, **nous ne calculons que les flux Est et Nord**.

L'étape prédicteur du schéma SRNHR

Dans ce cas on peut écrire l'état prédicteur **Est et Nord** sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i+\frac{1}{2}j}^{nEst} = \frac{1}{2} (U_{ij}^n + U_{i+1j}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}j}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}j}^n} \left(\mathcal{F}(U_{i+1j}^n, \overrightarrow{n_{i+\frac{1}{2}j}}) - \mathcal{F}(U_{ij}^n, \overrightarrow{n_{i+\frac{1}{2}j}}) \right) \\ \quad - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}j}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}j}^n} \mu_{i+\frac{1}{2}j} (P_{i+1j} - P_{ij}) \\ U_{ij+\frac{1}{2}}^{nNord} = \frac{1}{2} (U_{ij}^n + U_{ij+1}^n) - \frac{\alpha_{ij+\frac{1}{2}}^n}{2S_{ij+\frac{1}{2}}^n} \left(\mathcal{F}(U_{ij+1}^n, \overrightarrow{n_{ij+\frac{1}{2}}}) - \mathcal{F}(U_{ij}^n, \overrightarrow{n_{ij+\frac{1}{2}}}) \right) \\ \quad - \frac{\alpha_{ij+\frac{1}{2}}^n}{2S_{ij+\frac{1}{2}}^n} \mu_{ij+\frac{1}{2}} (P_{ij+1} - P_{ij}). \end{array} \right. \quad (8.18)$$

Où $\mathcal{F}(U_{ij}^n, \overrightarrow{n_{ij}}) = F(U_{ij}^n)(n_{ij})_x + G(U_{ij}^n)(n_{ij})_y$ représente le flux physique dans la cellule c_{ij} et $\mu_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2}(\mu_{ij} + \mu_{i+1j})$.

Précisons que les cellules au nord et à l'est de la cellule c_{ij} , sont respectivement les cellules : c_{ij+1} et c_{i+1j} .

8.3.1 Problème de Ransom en maillage quadrangulaire

On considère le problème du robinet de Ransom défini précédemment, avec maintenant un taux de vide initial égal à 0.2 (cas raide). Les conditions initiales et aux limites sont les suivantes :

Condition initiale :

$$\begin{aligned} \alpha_v(t=0) &= 0.2, \\ u_l(t=0) &= 10, \\ v_l(t=0) &= 0, \\ u_v(t=0) &= 0, \\ v_v(t=0) &= 0, \end{aligned}$$

8.3. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE QUADRANGULAIRE

$$\begin{aligned}p(t = 0) &= 10^5, \\ \rho_v(t = 0) &= 1, \\ \rho_l(t = 0) &= 988,0638.\end{aligned}$$

Condition aux limites

$$\begin{aligned}\alpha_v(0, t) &= 0.2, \\ u_l(0, t) &= 10, \\ v_l(0, t) &= 0, \\ u_v(0, t) &= 0, \\ v_v(0, t) &= 0, \\ p(12, t) &= 10^5.\end{aligned}$$

Le calcul est réalisé avec maillage formé de quadrilatères (8.66), de dimension 48×10 ; les résultats sont donnés au temps $t = 0.609$ (figures (8.67), (8.68), (8.69), (8.70), (8.71), (8.72), (8.73), (8.74), (8.75), (8.76)). On constate que dans ce cas le résultats sont de très bonne qualité, et comparables à ceux obtenus dans le cas $1D$.

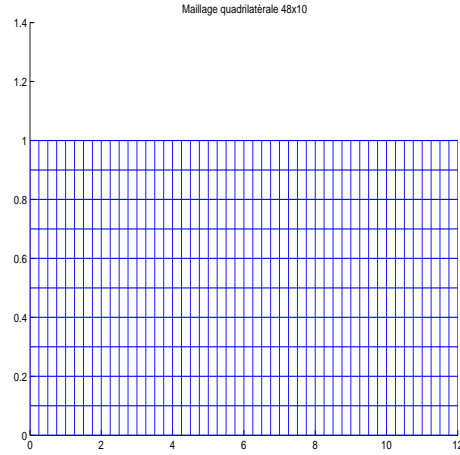


FIG. 8.66 – Maillage 48×10 .

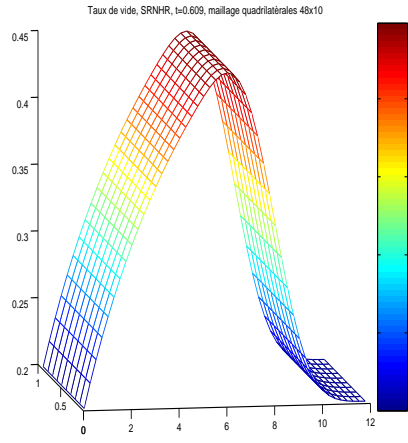


FIG. 8.67 – Taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

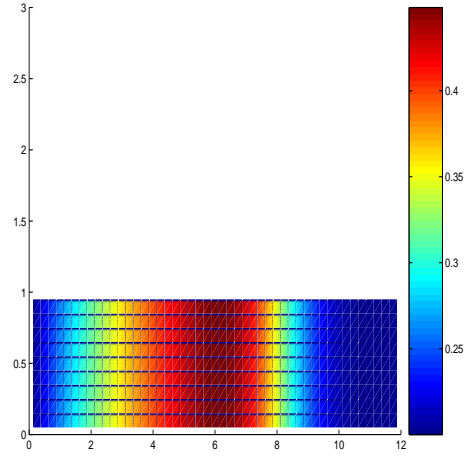


FIG. 8.68 – Isoaleur de taux de vide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

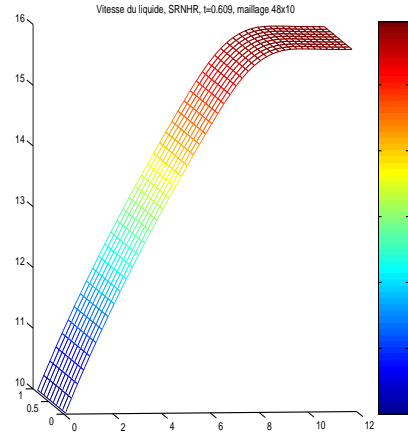


FIG. 8.69 – Vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

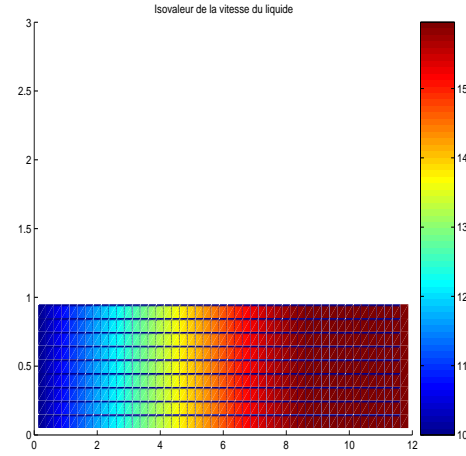


FIG. 8.70 – Isoaleur de la vitesse du liquide dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

8.3. PROBLÈME DIPHASIQUE BIDIMENSIONNEL EN MAILLAGE QUADRANGULAIRE

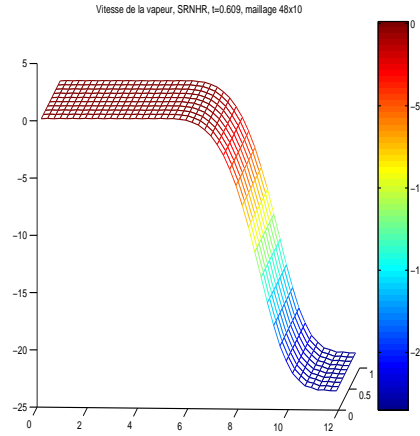


FIG. 8.71 – Vitesse de la vapeur dans la direction x ; schéma SRNHR($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

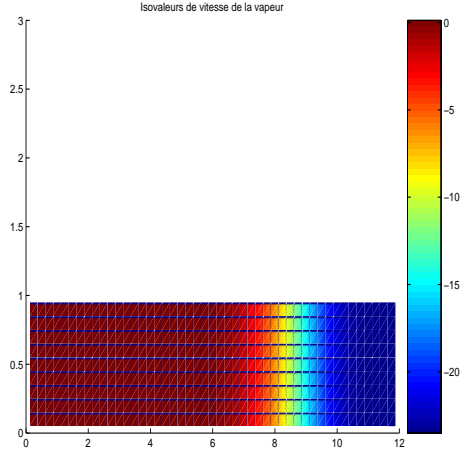


FIG. 8.72 – Isovaleur de la vitesse de la vapeur dans la direction x ; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

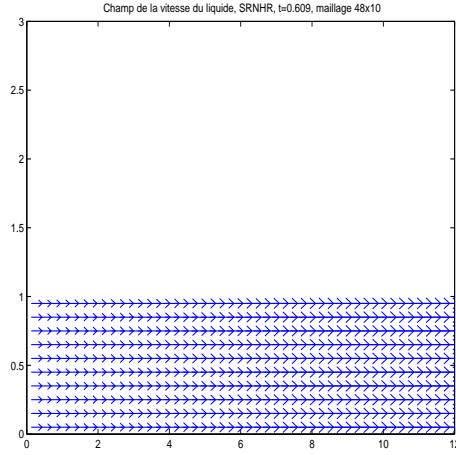


FIG. 8.73 – champs de vitesse du liquide; schéma SRNHR ($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

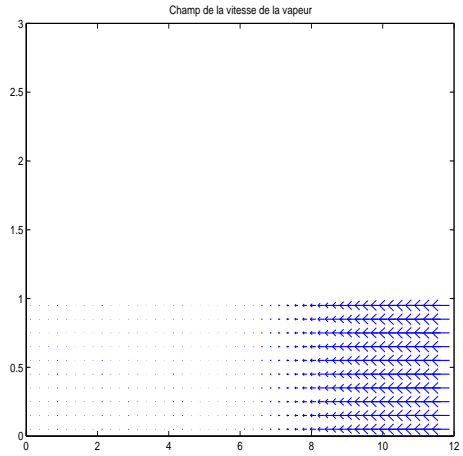


FIG. 8.74 – Champs de vitesse de la vapeur; schéma SRNHR($\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ constant).

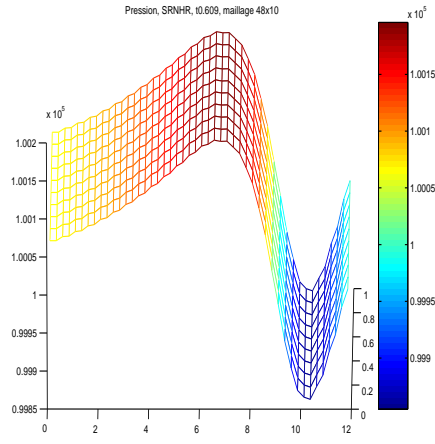


FIG. 8.75 – Pression ; schéma SRNHR($\alpha^n_{j+1/2}$ constant).

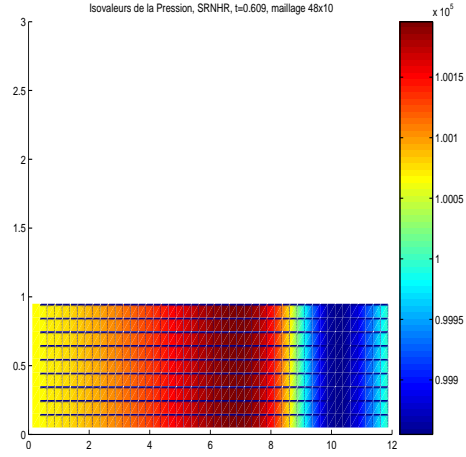


FIG. 8.76 – Isovaleur de la pression ; schéma SRNHR($\alpha^n_{j+1/2}$ constant).

Bibliographie

- [Ami97] K. El Amine, *Modélisation et analyse numérique des écoulements diphasiques en déséquilibre*, Ph.D. thesis, Paris 6, 1997.
- [ANS03] R. Abgrall, B. Nkonga, and R. Saurel, *Efficient numerical approximation of compressible multi-material flow for unstructured meshes*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 4, 571–605.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for non-homogeneous systems*, Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002), Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille, 2002, pp. 255–262 (electronic).
- [Elm99] I. Elmahi, *Schémas volumes finis pour la simulation numérique de problèmes à fronts raides en maillages non structurés adaptatifs*, Ph.D. thesis, Rouen, 1999.
- [Mim99] S. Mimouni, *Quelques cas-tests numériques pour la simulation des écoulements diphasiques*, Note interne EDF, HT 33/98/031/B (France), 1999.
- [Ran87] V.H. Ransom, *Numerical benchmark tests*, In Multiphase science and technology. Volume 3, Edited by G.F. Hewitt, J.M. Delhay and N. Zuber, Hemisphere (1987).
- [RNT03] N. Dinh R. Nourgaliev and T. Theofanous, *A characteristics-based approach to the numerical solution of the two-fluid model*, Proceedings of FEDSM2003-4555 (Honolulu, Hawaii, USA), 4 TH ASME/JSME joint fluids engineering conference, 6-11 July 2003.
- [Sah05] S. Sahmim, *Un schéma aux volumes finis avec matrice signe pour les systèmes non homogènes*, Ph.D. thesis, Paris 13, 2005.
- [Yan68] N.N. Yanenko, *Méthode à pas fractionnaires. résolution de problèmes polydimensionnels de physique mathématique*, no. Traduit du Russe par P. A. Nepomiaschchy, Librairie Armand Colin, 1968.

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse a eu pour objectif l'analyse et l'application d'un schéma aux Volumes Finis en deux étapes, à la simulation numérique monodimensionnelle et bidimensionnelle d'écoulements de fluides régis par des systèmes de lois de bilan non homogènes.

Le schéma proposé dépend, au niveau de la première étape qui calcule un état intermédiaire, d'un paramètre local $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ contrôlant la diffusion numérique.

Une stratégie de calcul de $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$ basée sur la théorie des limiteurs a été mise en oeuvre et testée avec succès en particulier sur des cas d'écoulements en eau peu profonde sur fonds fortement variables.

Le schéma se révèle également efficace pour les écoulements diphasiques à pression commune. On montre numériquement à ce niveau que le choix d'approximation du terme non différentiel dans la partie non homogène du système influence nettement la robustesse du schéma.

Dans le cas bidimensionnel, la projection du système d'équations sur la normale aux interfaces, lève la difficulté sur le calcul de l'état intermédiaire. Cependant, cette extension multidimensionnelle pose également le problème de l'approximation consistante des gradients aux interfaces, dans la deuxième étape du schéma.

Une étude numérique monodimensionnelle a permis d'obtenir une première approche concernant un choix pertinent du paramètre $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$. Des simulations numériques bidimensionnelles de phénomènes de rupture de barrage sur une marche, ainsi que du problème diphasique modèle du Robinet de Ransom ont également été réalisées.

La suite de ce travail consistera en une étude plus poussée de la méthode des limiteurs appliquée au choix de $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n$, et de son extension aux problèmes diphasiques et aux problèmes bidimensionnels. En outre, une analyse de consistance et d'ordre de l'approximation des gradients aux interfaces dans le cas bidimensionnel, s'avère nécessaire et fera l'objet de prochains travaux.